ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 5
2012

М. С. Тихов, **Т. С. Бородина** (Нижний Новгород, ННГУ).) **Асимптотическая нормальность ядерных оценок квантильной функции.**

Говоря о ядерных оценках квантильной функции, будем иметь в виду следующее. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые и одинаково распределенные случайные величины (с. в.) с непрерывной функцией распределения (ф. р.) $F(x)$ и $\mathbf{P}\{0 \leqslant X_i \leqslant 1\} = 1$. Пусть $x_\lambda = Q(\lambda) = \inf\{x\colon F(x) \geqslant \lambda\}$, $Q_n(\lambda) = \inf\{x\colon F_n(x) \geqslant \lambda\}$ и $F_n(x) = n^{-1}\sum_{i=1}^n \mathbf{I}\{X_i \leqslant x\}$ есть эмпирическая функция распределения. Оценка для $Q(\lambda_j)$ вида $\widehat{q}_{jn}(F_n) = \alpha_n^{-1}\int_0^1 Q_n(x)K((\lambda_j - x)/\alpha_n)\,dx$, где неслучайная последовательность $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$, $K(x)$ — ограниченная и непрерывная на $\mathbf{R}$ плотность распределения с носителем на $[-1,1]$, была предложена в работе [1]. При условиях гладкости на $F(x)$ и отделимости плотности $f(x)$ от нуля в [1] была доказана асимптотическая нормальность $\mathbf{N}(\mathbf{0},\Sigma)$ вектора $n^{1/2}(\widehat{q}_{jn}(F_n) - \widehat{q}_{jn}(F))_{j=1}^m$, где $\Sigma = (\sigma_{ij})$, $\sigma_{ij} = Q'(\lambda_i)Q'(\lambda_j)\lambda_i(1-\lambda_j)$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant m$. Доказательство основывалось на представлении Бахадура (см. [2–4]), которое позволяет вместо квантильного процесса $\rho_n(\lambda) = n^{1/2}f(Q(\lambda))(Q(\lambda) - Q_n(\lambda))$, $0 < \lambda < 1$, рассматривать эмпирический процесс $\alpha_n(x) = n^{1/2}(F_n(x) - F(x))$, $-\infty < x < \infty$.

Пусть $H(x) = \int_{-\infty}^x K(u)\,du$. Далее в качестве оценки ф. р. $F(x)$ мы будем использовать оценку $\widehat{F}_n(x)$ ядерного типа, именно, $\widehat{F}_n(x) = n^{-1}\sum_{i=1}^n H((\lambda - X_i)/\alpha_n)$. В [5] для оценок ядерного типа установлено, что $n^{1/4}|\alpha_n(Q(\lambda)) - \widehat{\rho}_n(\lambda)| \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} Y$. Там же указана ф. р. с. в. Y, более того, $n^{1/4}(\ln n)^{-1/2}\sup_{a\leqslant\lambda\leqslant b}|\alpha_n(Q(\lambda)) - \widehat{\rho}_n(\lambda)| \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} (\sup_{a\leqslant\lambda\leqslant b}|B(\lambda)|)^{1/2}$, где $\{B(\lambda),\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$ есть броуновское движение и $0 \leqslant a < b \leqslant 1$. Статистику $\widehat{q}_{jn}(\widehat{F}_n) = \alpha_n^{-1}\int_0^1 \widehat{Q}_n(x)K((\lambda_j - x)/\alpha_n)\,dx$ можно использовать в качестве оценки для $Q(\lambda_j)$, и можно показать, что предельным распределением вектора $n^{1/2}(\widehat{q}_{jn}(\widehat{F}_n) - \widehat{q}_{jn}(F))_{j=1}^m$ будет нормальное распределение $\mathbf{N}(\mathbf{0},\Sigma)$. Здесь же мы рассматриваем оценки вида $\widehat{x}_{1,n}(\lambda_j) = n^{-1}\sum_{i=1}^n H((\lambda_j - \widehat{F}_n(i/n))/\alpha_n)$ и доказываем, что распределения вектора $n^{1/2}(\widehat{x}_{1,n}(\lambda_j) - Q(\lambda_j))_{j=1}^m$ при некоторых условиях регулярности сходятся к нормальному распределению $\mathbf{N}(\mathbf{0},\Sigma)$. Отметим, что в регрессионной схеме аналогичные оценки были предложены и изучены в [6].

Рассматриваются также статистики

$$\widehat{x}_{2,n}(\lambda) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^n \frac{i}{n} H\biggl(\frac{\lambda - \widehat{F}_n(i/n)}{\alpha_n}\biggr),$$

которые служат основой предложенных ниже оценок $\widehat{x}_{3,n}(\lambda_j)$. Показано, что

$$\widehat{x}_{2,n}(\lambda) \xrightarrow[n\to\infty]{p} x_\lambda^2 \quad \text{и} \quad n^{1/2}(\widehat{x}_{2,n}(\lambda) - x_\lambda^2) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \mathbf{N}(0,\sigma^2),$$

где $\sigma^2 = 4\lambda(1-\lambda)x_\lambda^2/f^2(x_\lambda)$, поэтому в качестве оценки x_λ рассмотрим следующую статистику: $\widehat{x}_{3,n}(\lambda) = (\widehat{x}_{2,n}(\lambda))^{1/2}$. Учитывая теорему 1.5 из [6, с. 299] и рассматривая

$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m < 1$, мы доказываем, что

$$n^{1/2}(\widehat{x}_{3,n}(\lambda_j) - x_{\lambda_j})_{j=1}^m \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \mathbf{N}(\mathbf{0}, \Sigma_1), \quad \Sigma_1 = (\rho_{ij})_{m\times m}, \quad \rho_{ij} = \rho_{ji},$$

где $\rho_{ij} = \lambda_i(1-\lambda_j)(x_{\lambda_i}x_{\lambda_j})^{1/2}/(f(x_{\lambda_i})f(x_{\lambda_j}))$, $i \leqslant j$.

Поскольку $0 < x_{\lambda_j} < 1$, предельные дисперсии оценок $\widehat{x}_{3,n}(\lambda_j)$ меньше, чем предельные дисперсии оценок $\widehat{x}_{1,n}(\lambda_j)$ и оценок $\widehat{q}_{jn}(\widehat{F}_n)$.

Изучены также оценки вида

$$\widehat{x}_{4,n}(\lambda) = \left(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^n U_i\, H\left(\frac{\lambda - \widehat{F}_n(U_i)}{\alpha_n}\right)\right)^{1/2},$$

где $U_i \in \mathbf{R}(0,1)$ независимы, и доказана их асимптотическая нормальность с параметрами $(\mathbf{0}, \Sigma_1)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Falk M.* Asymptotic normality of the kernel quantile estimator. — Ann. Statist., 1985, v. 13, p. 428–433.
2. *Bahadur R. R.* A note on quantiles in large samples. — Ann. Math. Statist., 1966, v. 37, p. 577–580.
3. *Kiefer J.* On Bahadur's representation of sample quantiles. — Ann. Math. Statist., 1967, v. 38, p. 1323–1342.
4. *Kiefer J.* Deviations between the sample quantile process and the sample D.F. — In: Nonparametric Techniques in Statistical Inference (M. L. Puri, ed.). London: Cambridge Univ. Press., 1970, p. 299–319.
5. *Csörgö M.*, *Horváth L.* On the distance between smoothed empirical and quantile process. — Ann. Statist., 1995, v. 23, p. 113–131.
6. . *Dette H.*, *Neumeyer N.*, *Pilz K. F.* A note on nonparametric estimation of the effective dose in quantal bioassay. — J. Amer. Statist. Assoc., 2005, v. 100, № 470, p. 503-510.
7. *Леман Э.* Теория точечного оценивания. М.: Наука, 1991, 448 с.