ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 5
2012

Л. П. Усольцев (Самара, СамГУ). **Об основных предельных теоремах для распределения дробных долей показательной функции.**

Предлагается новая методика применения диофантовых уравнений с показательной функцией, позволяющая получить неулучшаемые оценки остаточных членов в центральной и локальной предельных теоремах и теореме об асимптотике больших уклонений для распределения дробных долей показательной функции.

Пусть $q \geqslant 2$ — фиксированное целое число, а $f(t)$ — вещественнозначная интегрируемая с квадратом на отрезке $[0,1]$ периодическая функция с периодом 1 и коэффициентами Фурье $a_m = \int_0^1 f(t)e^{-2\pi imt}\,dt$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, удовлетворяющими условию $|a_m| \leqslant A/|m|^{\alpha}$ $(m = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, где $A > 0$ и $\alpha > 1/2$ — постоянные. Для любого целого числа $N \geqslant 2$ положим $S_N(t) = N^{-1/2}\sum_{n=0}^{N-1}(f(q^n t) - a_0)$ $(0 \leqslant t < 1)$, $F_N(x) = \operatorname{mes}\{t \in [0,1]\colon\ S_N(t) < x\}$ $(-\infty < x < \infty)$, $\varphi_N(\lambda) = \int_0^1 e^{i\lambda S_N(t)}\,dt$ $(-\infty < \lambda < \infty)$.

Согласно центральной предельной теореме для распределения дробных долей показательной функции (теорема Форте–Каца; см., например, книгу А.Г.Постникова [1, § 15]), существует конечный предел $\lim_{N\to\infty}\int_0^1 S_N^2(t)\,dt = \sigma^2$ $(\sigma \geqslant 0)$, причем в случае, когда $\sigma \neq 0$, при всех вещественных x выполняется соотношение

$$\lim_{N\to\infty} F_N(\sigma x) = \Phi(x), \tag{1}$$

где $\Phi(x)$ — нормальная функция распределения с параметрами (0,1).

Исследование асимптотики в соотношении (1) для различных классов функций $f(t)$ проводилось как чисто вероятностными методами, так и с привлечением арифметических средств, коль скоро задача о распределении на единичном отрезке дробных долей показательной функции, породившая соотношение (1), имеет не только вероятностную, но и арифметическую природу. Все такие исследования базировались на оценке модуля разности характеристических функций $\varphi_N(\lambda)$ и $\varphi(\lambda) = e^{-\sigma^2\lambda^2/2}$ распределений F_N и Φ соответственно.

Используя новую методику применения диофантовых уравнений с показательной функцией, можно получить следующее утверждение.

Теорема 1. *Если $\sigma \neq 0$, то существуют такие положительные постоянные $N_0 \geqslant 2$, c_1 и c_2, зависящие от A, α и σ, что при всех целых $N \geqslant N_0$ и всех вещественных λ из области $|\lambda| \leqslant c_1\sqrt{N}$ выполняется оценка*

$$\left|\varphi_N(\lambda) - e^{-\sigma^2\lambda^2/2}\right| \leqslant \frac{c_2(|\lambda|^3 + |\lambda|)}{\sqrt{N}} e^{-\sigma^2\lambda^2/4}. \tag{2}$$

Из справедливости неравенства (2) в области $|\lambda| \leqslant c_1\sqrt{N}$ стандартными приемами, связанными с применением теоремы Эссеена, выводится следующее утверждение.

Теорема 2 (Центральная предельная теорема). *Для всех $\alpha \in (1/2, 1]$ с $\sigma \neq 0$ при $N \to \infty$ равномерно относительно x, $-\infty < x < \infty$, выполняется соотношение*

$F_N(\sigma x) = \Phi(x) + O\left(N^{-1/2}\right)$ *с положительной постоянной в символе «O», зависящей от A, α и σ.*

При доказательстве теоремы 1 мы используем не моменты распределения $F_{N,M}$, в которое переходит F_N в результате замены функции $f(t)$ M-й частичной суммой ее ряда Фурье с $M \geqslant 2$, растущим вместе с N (так поступали в работах [1–3]), а семиинварианты $\gamma_k(N,M)$ $(k = 2,3,\ldots)$ этого распределения, для которых нами получено:

$$\gamma_k(N,M) = \frac{1}{N^{k/2}} \underbrace{\sum_{n_1=0}^{N-1} \cdots \sum_{n_k=0}^{N-1}}_{[W_k]} \underbrace{{\sum_{m_1=-M}^{M}}' \cdots {\sum_{m_k=-M}^{M}}'}_{[m_1 q^{n_1} + \cdots + m_k q^{n_k} = 0]} a_{m_1} a_{m_2} \cdots a_{m_k}, \tag{3}$$

где штрих у знака суммы $\sum\limits_m$ показывает, что из области суммирования исключено значение $m = 0$, а символом $W_k = W_k(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ обозначено следующее условие: для каждого набора $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ отличных от нуля целых чисел m_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ при всех $r = 1, 2, \ldots, k-1$ для любых r чисел $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$ множества $\{1, 2, \ldots, k\}$ верно $m_{j_1} q^{n_{j_1}} + m_{j_2} q^{n_{j_2}} + \cdots + m_{j_r} q^{n_{j_r}} \neq 0$.

Представление семиинвариантов распределения $F_{N,M}$ в виде (3) позволило легко провести их оценивание, осуществляя должным образом организованный перебор решений $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ уравнения

$$m_1 q^{n_1} + m_2 q^{n_2} + \cdots + m_k q^{n_k} = 0 \tag{4}$$

с заданными $n_i \in \{0, 1, 2, \ldots, N-1\}$, $i = 1, 2, \ldots, k$ (т. е. линейного уравнения!), в то время, как оценивание моментов распределения $F_{N,M}$ сводилось к оцениванию числа решений уравнения (4) с заданными целыми $m_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, относительно неизвестных $(n_1, n_2, \ldots, n_k) \in \{0, 1, 2, \ldots, N-1\}$, т. е. к рассмотрению уже нелинейного уравнения.

Оценив величины $\gamma_k(N,M)$, нетрудно получить также следующее утверждение.

Теорема 3 (Асимптотика больших уклонений). *Для всех $\alpha \in (1/2, 1]$ с $\sigma \neq 0$ существует такая постоянная $\delta = \delta(A, \alpha, \sigma) > 0$, что в области $2 \leqslant x \leqslant \delta N^{1/6}$ при $N \to \infty$ выполняются соотношения*

$$1 - F_N(\sigma x) = [1 - \Phi(x)] \left[1 + O\left(\frac{x^3}{\sqrt{N}}\right)\right], \quad F_N(-\sigma x) = \Phi(-x) \left[1 + O\left(\frac{x^3}{\sqrt{N}}\right)\right]$$

с положительными постоянными в символах «O», зависящими от A и σ.

Если

$$f(t) = \chi_\Delta(t) = \begin{cases} 1 & t \in \Delta, \\ 0 & t \notin \Delta, \end{cases} \qquad 0 \leqslant t < \infty,$$

с $\Delta = [a, b) \subset [0, 1)$ и $|\Delta| = b - a < 1$ и, следовательно, сумма $Q_N(t, \Delta) = \sum_{n=0}^{N-1} \varphi_\Delta(\{q^n t\})$ $(N \geqslant 2)$ дает количество дробных долей $\{q^n t\}$, попадающих в промежуток Δ, когда n пробегает целые значения от 0 до $N-1$, то $\sigma_\Delta = \sigma \neq 0$ и справедлива локальная предельная теорема для распределения дробных долей показательной функции, доказанная Д. А. Москвиным и А. Г. Постниковым в работе [4]. В своих конструкциях авторы работы [4] использовали лемму 1 работы [5], дающую в области $|\lambda| \leqslant c\sqrt{N/\ln N}$, где $c > 0$ — постоянная, хорошую оценку модуля разности функций $\varphi_N(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)$. Если же использовать более сильное, нежели указанная лемма, утверждение (теорему 1 настоящей работы), то теорема, содержащаяся в [4], почти автоматически примет следующий вид.

Теорема 4 (Локальная предельная теорема). *При $N \to \infty$ равномерно относительно τ, $\tau = 0, 1, 2, \ldots,$ выполняется соотношение*

$$\operatorname{mes}\{t \in [0,1] \colon\ Q_N(\Delta, t) = \tau\} = \frac{1}{\sigma_\Delta \sqrt{2\pi N}} \exp\left\{-\frac{(\tau - |\Delta| N)^2}{2N\sigma_\Delta^2}\right\} + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

с положительной постоянной в символе « O », *зависящей от* σ_Δ *и* $|\Delta|$.

Оценки остаточных членов в теоремах 2–4, будучи такими же по силе, что и для распределения сумм независимых случайных величин, являются неулучшаемыми.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Постников А. Г.* Эргодические вопросы теории сравнений и теории диофантовых приближений. — Труды МИ АН СССР, 1966, т. 82.
2. *Мухутдинов Р. Х.* Диофантово уравнение с матричной показательной функцией. — Докл. АН СССР, 1962, т. 142, № 1, с. 36–38.
3. *Усольцев Л. П.* Об асимптотике и больших уклонениях в центральной предельной теореме для сумм вида $\sum f(q^n t)$. — Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия, 2009, № 4 (70), с. 52–84.
4. *Москвин Д. А.*, *Постников А. Г.* Локальная предельная теорема для распределения дробных долей показательной функции. — Теория вероятн. и ее примен., 1978, т. XXIII, в. 3, с. 540–547.
5. *Ибрагимов И. А.* Центральная предельная теорема для сумм функций от независимых величин и сумм вида $\sum f(2^k t)$. — Теория вероятн. и ее примен., 1967, т. XII, в. 4, с. 655–665.