ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 5
2012

В. М. Хаметов, Е. А. Шелемех (Москва, МИЭМ НИУ ВШЭ).
Минимаксное хеджирование американского опциона с конечным горизонтом на неполных рынках (дискретное время).

Доклад посвящен минимаксному подходу к решению задачи расчета американского опциона на неполном рынке в случае дискретного времени и конечного горизонта. Подход, использованный в докладе, основан на построениях работы [1, 2]. Он позволяет эффективно решать задачу хеджирования на неполных рынках.

Постановка задачи. Пусть на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}, P)$ задана d-мерная последовательность $(S_n, \mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$, описывающая эволюцию цен d-мерного рискового актива. Обозначим $S_0^n \triangleq (S_0, S_1, \ldots, S_n)$. Везде ниже полагаем, что фильтрация $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ универсально полна. Пусть на $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0})$ заданы вероятностные меры $Q \sim P$. Множество таких мер обозначим $\mathfrak{R}_N$. Пусть: i) $\mathcal{T}_n^N$ — множество моментов остановки τ относительно фильтрации $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$, принимающих значения в множестве $\{n, n+1, \ldots, N\}$, $\forall N \in \mathbf{N}^+$; ii) $\{f_n\}_{0\leqslant n\leqslant N}$ — последовательность $\mathcal{F}_n$-измеримых ограниченных случайных величин — динамическое платежное обязательство; iii) $\{\gamma_n\}_{0\leqslant n\leqslant N}$ — d-мерная $\mathcal{F}$-предсказуемая случайная последовательность. Пусть D_n^N — множество матриц $\gamma_n^N \triangleq (\gamma_n, \gamma_{n+1}, \ldots, \gamma_N)$, $0 \leqslant n \leqslant N$. Обозначим: $I^{(Q,\tau),\gamma_{n+1}^\tau}(n, S_0^n) \triangleq M^Q[\exp\{f_\tau - \sum_{i=n+1}^{\tau}(\gamma_i, \triangle S_i)\}|\mathcal{F}_n]$, где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbf{R}^d$, $\widehat{D}_n^N \triangleq \{\gamma_n^N \in D_n^N : I^{(Q,\tau),\gamma_{n+1}^\tau}(n, S_0^n) < \infty \ \ P\text{-п. н.}, \ \tau \in \mathcal{T}_n^N\}$.

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$I^{(Q,\tau),\gamma_1^\tau}(0, S_0) \to \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma_1^N \in \widehat{D}_1^N} \ \operatorname*{ess\,sup}_{(Q,\tau)\in(\mathfrak{R}_N, \mathcal{T}_0^N)}. \tag{1}$$

Определение. *Решением задачи* (1) назовем такой набор $((Q^*, \tau^*), \gamma_1^{*N})$, что $I^{(Q^*,\tau^*),\gamma_1^{*\tau^*}}(0, S_0) = \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma_1^N \in \widehat{D}_1^N} \operatorname*{ess\,sup}_{(Q,\tau)\in(\mathfrak{R}_N, \mathcal{T}_0^N)} I^{(Q,\tau),\gamma_1^\tau}(0, S_0)$ P-п. н., а самофинансирующий портфель π^*, порожденный γ_1^{*N}, назовем *минимаксным.*

Основные результаты. Пусть $\overline{v}_n^N \triangleq \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma_{n+1}^N \in \widehat{D}_{n+1}^N} \operatorname*{ess\,sup}_{(Q,\tau)\in(\mathfrak{R}_N, \mathcal{T}_n^N)} I^{(Q,\tau),\gamma_{n+1}^\tau}(n, S_0^n)$.

Теорема 1. *Для любого* n, $0 \leqslant n \leqslant N$, $\overline{v}_n^N$ *удовлетворяет рекуррентному соотношению* P*-п. н.*

$$\begin{cases} \overline{v}_n^N = \max\Big\{e^{f_n}; \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma_{n+1}^N \in \widehat{D}_{n+1}^N} \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathfrak{R}_N} M^Q[e^{-(\gamma_{n+1}, \triangle S_{n+1})}\overline{v}_{n+1}^N \,|\, \mathcal{F}_n]\Big\}, \\ \overline{v}_n^N|_{n=N} = e^{f_N}. \end{cases} \tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть*: i) $\{\overline{v}_n^N\}_{0\leqslant n\leqslant N}$ *удовлетворяет рекуррентному соотношению* (2); ii) *найдутся такие мера* $Q \in \mathfrak{R}_N$ *и константа* $b > 0$, *что для любых* n, $1 \leqslant n \leqslant N$, *и* $\gamma_n \in \widehat{D}_n$ *выполняется* $M^Q[\exp\{-(\gamma_n, \triangle S_n)\}|\mathcal{F}_{n-1}] \geqslant b$ P*-п. н.*;

iii) *множество* $\mathfrak{R}_N$ *относительно слабо компактно. Тогда существует решение задачи* (1), *причем мера* Q^* *— единственная мартингальная и* $Q^* \notin \mathfrak{R}_N$.

Приводимая ниже теорема устанавливает точки, в которых сосредоточен носитель мартингальной меры Q^* . Для этого обозначим $Q^*(A|\mathcal{F}_n)$ регулярную условную вероятность $Q^*(S_{n+1} \in A|\mathcal{F}_n)$, где A — любое множество из $\mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$.

Теорема 3. *Пусть существует решение задачи* (1) . *Тогда* Q^* *— единственная мартингальная дискретная мера, носитель которой сосредоточен не более, чем в* $(d+1)^N$ *точке, и для любого* $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$ *регулярная условная вероятность* $Q^*(A|\mathcal{F}_n)$ *допускает представление* $Q^*(A|\mathcal{F}_n) = \int_A \sum_{i=1}^{d+1} c^*_{\{i\},n+1} \delta_{\{\triangle x^{*\{i\}}_{n+1}\}}(dx)$, *где* $c^*_{\{i\},n+1} > 0$, $1 \leqslant i \leqslant d+1$, $\sum_{i=1}^{d+1} c^*_{\{i\},n+1} = 1$, $\sum_{i=1}^{d+1} c^*_{\{i\},n+1} \triangle x^{*\{i\}}_{n+1} = 0$, *причем* $\triangle x^{*\{i\}}_{n+1} \in \mathbf{R}^d$ — $\mathcal{F}_n$ *-измеримы, аффинно независимы и являются решением уравнения*

$$-(\gamma^*_{n+1}, \triangle x^{*\{i\}}_{n+1}) + \ln \overline{v}^N_{n+1}(S^n_0, S_n + \triangle x^{*\{i\}}_{n+1}) = \max_{y \in \mathbf{R}^d} \{-(\gamma^*_{n+1}, y) + \ln \overline{v}^N_{n+1}(S^n_0, S_n + y)\},$$

а $\delta_{\{\triangle x^{*\{i\}}_{n+1}\}}(dx)$ *— мера Дирака.*

Теорема 4. *Пусть существует решение задачи* (1) . *Тогда* γ^*_{n+1} *является решением системы линейных уравнений* $X_{n+1}\gamma^*_{n+1} = W_{n+1}$, *где матрица* $X_{n+1} \triangleq (a_{1,n+1}, \ldots, a_{d,n+1})$, $a_{i,n+1} \triangleq \triangle x^{*i+1}_{n+1} - \triangle x^{*1}_{n+1}$, *причем* $\triangle x^{*1}_{n+1} \neq 0$, *а* $W_{n+1} \triangleq (w_{1,n+1}, \ldots, w_{d,n+1})$, $w_{i,n+1} \triangleq \ln\{\overline{v}^N_{n+1}(S^n_0, S_n + \triangle x^{*\{i+1\}}_{n+1}) / \overline{v}^N_{n+1}(S^n_0, S_n + \triangle x^{*\{1\}}_{n+1})\}$.

Теорема 4 позволяет построить самофинансирующий минимаксный хеджирующий портфель.

Теорема 5. *Пусть существует решение задачи* (1) . *Тогда случайная величина* f_{τ^*} *относительно меры* Q^* *допускает представление* $f_{\tau^*} = M^{Q^*}[f_{\tau^*}|\mathcal{F}_0] + \sum_{i=1}^{\tau^*} (\gamma^*_i, \triangle S_i)$.

Из теоремы 5 следует, что рассматриваемый рынок относительно меры Q^* - полный.

Теорема 6. *Пусть существует решение задачи* (1) . *Тогда* $\tau^* \in \mathcal{T}^N_0$ *является решением задачи об оптимальной остановке*: $M^{Q^*}[f_\tau|\mathcal{F}_0] \to \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}^N_0}$.

Теоремы 4–6 позволяют осуществить расчет самофинансирующего минимаксного хеджирующего портфеля для американского опциона относительно меры Q^* .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зверев О. В., Хаметов В. М.* Минимаксное хеджирование опционов европейского типа на неполных рынках (дискретное время). — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2011, т. 18, в. 1, с. 26–54.
2. *Зверев О. В., Хаметов В. М.* Минимаксное хеджирование опционов европейского типа на неполных рынках (дискретное время) II. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2011, т. 18, в. 2, с. 193–204.