ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 5
2012

Д. Е. Ефимов (Москва, ЗАО ЗТ). **Оценка точности решения линейного опраторного уравнения при некоторых ограничениях.**

Оператор $\mathbf{T}$ с областью определения D называется *ограниченным*, если в каждой сфере $\|f\| \leqslant R$ выполнено неравенство $\|\mathbf{T}f\| \leqslant C_R < \infty$ $(f \in D)$ [1, с. 61].

Теорема 1. *Пусть в нормированном пространстве X заданы операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ с областью определения D и областью значений $F \subset D$; D обладает следующим свойством: для любых $a, b \in D$ разность $(a - b) \in D$. Оператор $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ является ограниченным, операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ обладают свойством: $\mathbf{AB}f = \mathbf{BA}f = \mathbf{A}^2 f$ для любых $f \in D$. Тогда существует такая функция $U\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, что для всех $n \in \mathbf{N}$ и всех $f \in D$ выполняется неравенство $\|\mathbf{A}^n f - \mathbf{B}^n f\| \leqslant U^{(n)}(\|f\|)$.*

Определение. Уравнение вида $\varphi - \lambda\mathbf{A}\varphi = f$, где φ, f — элементы банахова пространства E, λ — комплексный параметр, $\mathbf{A}$ — линейный вполне непрерывный оператор, называется *линейным операторным уравнением* (см. [3, т. 1, с. 754]).

Известно, что если оператор $(I - \lambda A)$ обратим в E при любом $\lambda \neq \infty$, то при произвольном $\varphi_0 \in E$ последовательность $\varphi_{n+1} = \lambda A\varphi_n + f$ сходится к решению уравнения. Верно следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть E — банахово пространство, $f \in E$, λ — комплексный параметр, $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'$ — линейные вполне непрерывные операторы и $\mathbf{AA}' = \mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{A}'\mathbf{A}'$, последовательности φ_n, ψ_n заданы формулами $\varphi_0 = \psi_0 \in E$, $\varphi_{n+1} = \lambda\mathbf{A}\varphi_n + f$ и $\psi_{n+1} = \lambda\mathbf{A}'\psi_n + f$. Тогда если $|\lambda|\|\mathbf{A} - \mathbf{A}'\| = 1$, то $\|\varphi_{n+1} - \psi_{n+1}\| \leqslant \|\varphi_0\| + n\|f\|$, если $|\lambda|\|\mathbf{A} - \mathbf{A}'\| \neq 1$, то*

$$\|\varphi_{n+1} - \psi_{n+1}\| \leqslant (|\lambda|\|\mathbf{A} - \mathbf{A}'\|)^n \|\varphi_0\| + \|f\|(|\lambda|\|\mathbf{A} - \mathbf{A}'\|)\frac{(|\lambda|\|\mathbf{A} - \mathbf{A}'\|)^n - 1}{(|\lambda|\|\mathbf{A} - \mathbf{A}'\|) - 1}.$$

Следствие. *Пусть E — банахово пространство, $f \in E$, λ — комплексный параметр, A_1, A_2, A' — линейные вполне непрерывные операторы и $A_1A' = A'A_1 = A'A'$, $A_2A' = A'A_2 = A'A'$, операторы $(I - \lambda A_1)$ и $(I - \lambda A_2)$ обратимы при любом $\lambda \neq \infty$. Пусть для некоторого λ_0 выполняются неравенства $|\lambda_0|\|A_1 - A'\| < 1$ и $|\lambda_0|\|A_2 - A'\| < 1$. Тогда для φ, ψ — решений уравнений $\varphi - \lambda_0 A_1\varphi = f$ и $\psi - \lambda_0 A_2\psi = f$ соответственно — выполняется соотношение*

$$\|\varphi - \psi\| \leqslant \|f\||\lambda_0|\left(\|A_1 - A'\|\frac{1}{1 - |\lambda_0|\|A_1 - A'\|} + \|A_2 - A'\|\frac{1}{1 - |\lambda_0|\|A_2 - A'\|}\right).$$

© Редакция журнала «ОПиПМ», 2012 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ахиезер Н. И.*, *Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Физматлит, 1966, 544 с.
2. *Ефимов Д. Е.* Оценка нормы разности между частичными произведениями некоторых последовательностей линейных операторов (в печати).
3. Математическая энциклопедия./ Гл. ред. И. М. Виноградов. М.: Советская энциклопедия, 1979.