ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2012

**А. Н. Фролов** (Санкт-Петербург, СПбГУ). **О малых уклонениях некоторых итерированных процессов в пространстве траекторий.**

Пусть $\xi(t)$ и $\Lambda(t)$ ( $t \geqslant 0$ ) — независимые случайные процессы, заданные на одном вероятностном пространстве, $\mathbf{P}\{0 \leqslant \Lambda(t) < \infty\} = 1$ для всех $t \geqslant 0$. Случайный процесс $\eta(t) = \xi(\Lambda(t))$ называется *итерированным процессом.*

Предположим, что $\xi(t)$ — однородный процесс с независимыми приращениями. Пусть с вероятностью 1 траектории $\xi(t)$ непрерывны справа, $\Lambda(t)$ имеет неубывающие непрерывные траектории, $\Lambda(0) = 0$ и $\Lambda(\infty) = \infty$.

Мы опишем асимптотическое поведение логарифма вероятности

$$P_T = \mathbf{P}\{-g_1(\Lambda(t)/\Lambda(T))x_T \leqslant \eta(t) \leqslant g_2(\Lambda(t)/\Lambda(T))x_T \quad \text{для всех} \quad t \in [0,T]\},$$

где $g_i(t)$ ( $t \in [0,1]$, $i = 1,2$) — непрерывные неубывающие функции, $g_i(0) > 0$.

Границы $g_i(\Lambda(t)/\Lambda(T))$ в определении $P_T$ являются неслучайными функциями в следующих важных случаях.

1. $g_1(t) \equiv 1$ и $g_2(t) \equiv 1$. Тогда $P_T$ представляет собой вероятность того, что процесс $\eta(t)$ находится до момента времени $T$ в симметричной относительно нуля полосе ширины $2x_T$. Этот случай исследован автором в [2, 4].

2. $\Lambda(t) = \Lambda f(t)$, где $\Lambda$ — неотрицательная случайная величина, $f(t)$ — положительная функция, $f(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Если $f(t) = t^\beta$, то $P_T = \mathbf{P}\{-g_3(t)x_T \leqslant \eta(tT) \leqslant g_4(t)x_T$ для всех $t \in [0,1]\}$, где $g_{i+2} = g_i(t^\beta)$, $i = 1,2$. В этом случае можно рассмотреть семейство случайных процессов $\{\eta_T(t) = \eta(Tt)/x_T, t \in [0,1], T \geqslant 0\}$ с траекториями из пространства Скорохода $D[0,1]$ и исследовать поведение $\mathbf{P}\{(\eta_T(\cdot) \in G\}$, $G \in \mathbf{G}$, где $\mathbf{G}$ — семейство подмножеств в $D[0,1]$, которое можно определить подобно тому, как это сделано в [1] (подробнее см. [3]).

**Теорема.** *Пусть существуют такие положительная возрастающая непрерывная функция $f(t)$, $f(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, и неотрицательная случайная величина $\Lambda$, что распределения $\Lambda(t)/f(t)$ слабо сходятся к распределению $\Lambda$ при $t \to \infty$. Пусть $\operatorname{ess\,inf} \Lambda(t)/f(t) \to \widehat{\lambda} = \operatorname{ess\,inf} \Lambda$ при $t \to \infty$.*

*Если $\mathbf{E}\,\xi(1) < \infty$, то предположим, что $\mathbf{E}\,\xi(1) = 0$. Пусть распределения $\xi(n)/B_n$ слабо сходятся при $n \to \infty$ к строго устойчивому закону $F_\alpha$ с показателем $\alpha \in (0,2]$ и $F_\alpha(0) \in (0,1)$, где $\{B_n\}$ — последовательность положительных постоянных.*

*Тогда для любой такой положительной функции $x_T$, что $x_T \to \infty$ и $x_T = o(B_{[f(T)]})$ при $T \to \infty$, выполняется соотношение*

$$\frac{x_T^\alpha \ln P_T}{f(T)L(x_T)} \to -\widehat{\lambda} C \int_0^1 (g_2(t) + g_1(t))^{-\alpha}\, dt \quad \text{при} \quad T \to \infty, \tag{1}$$

*где $L(x) = x^{2-\alpha}\mathbf{E}\,\xi^2(1)\,\mathbf{I}\{|\xi(1)| < x\}$ — медленно меняющаяся на бесконечности функция, $C$ — положительная постоянная, зависящая только от $F_\alpha$, $C = \pi^2/2$ при $\alpha = 2$. Здесь $[x]$ — целая часть $x$, $\mathbf{I}\{B\}$ — индикатор события $B$.*

При $\widehat{\lambda} = 0$ соотношение (1) не дает точной асимптотики $\ln P_T$ . В этом случае мы покажем, что эта асимптотика может быть существенно иной. Для обобщенного пуассоновского процесса $\xi(t)$ соответствующие результаты получены автором в [3].

Работа выполнена при частичной поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», грант № 2010-1.1-111-128-033.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Могульский А. А.* Малые уклонения в пространстве траекторий. — Теория вероятн. и ее примен., 1974, т. XIX, в. 4, с. 726–736.
2. *Фролов А. Н.* О вероятностях малых уклонений обобщенных процессов Кокса. — Записки научного семинара ПОМИ, 2006, т. 339, с. 163–175.
3. *Frolov A. N.* On asymptotic behaviour of probabilities of small deviations for compound Cox processes. — Theor. Stoch. Proc., 2008, v. 14 (30), № 2, p. 19–27.
4. *Фролов А. Н.* Предельные теоремы для вероятностей малых уклонений некоторых итерированных случайных процессов. — Записки научного семинара ПОМИ, 2011, т. 396, с. 218–232.
5. *Frolov A. N.* Small deviations of iterated processes in space of trajectories. 2012, available from http://arxiv.org/abs/1208.6148.