ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 5
2012

**М. В. М о р о з о в а** (Самара, ИПУСС РАН). **Об оптимальной переориентации космического аппарата по минимуму расхода управления.**

Угловое движение космического аппарата (КА), рассматриваемое по одному из каналов управления его ориентацией на заданном интервале $[-T/2, +T/2]$, описывается уравнениями

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t), \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = x_3(t) + f(t), \quad \frac{dx_3(t)}{dt} = u(t), \tag{1}$$

где $x_1(t)$, $x_2(t)$ — фазовые переменные, которым отвечают $\gamma(t)$ — угол поворота и $\omega(t)$ — угловая скорость КА, $x_3(t)$ — относительный управляющий момент, создаваемый с помощью электромеханических исполнительных органов [1], $u(t)$ — управляющий параметр (или скорость изменения управляющего ускорения), а $f(t)$ — возмущающие воздействия, включая перекрестные связи между каналами управления, здесь $f(t)$ будет предполагаться известной функцией времени.

Модель маневра переориентации КА задается граничными условиями:

$$\begin{aligned} &x_1(-T/2) = 0, \quad x_2(-T/2) = 0, \quad x_3(-T/2) = 0,\\ &x_1(T/2) = \gamma_T, \quad x_2(T/2) = 0, \quad x_3(T/2) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\gamma_T$ — угол поворота КА $(0 < \gamma_T \leqslant \pi)$, а $T$ — длительность маневра.

Рассматривается задача управления для (1), (2), в которой требуется найти управление, доставляющее минимум расхода управления за маневр или, в соответствии с [2], полный импульс управляющего воздействия в виде функционала типа нормы в $L_1$:

$$J(u) = \|u(\cdot)\|_{L_1} = \int_{-T/2}^{+T/2} |u(\tau)|\, d\tau. \tag{3}$$

В соответствии с принципом максимума Н. Н. Красовского, задача (1)–(3) сводится к оптимальной проблеме моментов в $L_\infty$. Ее решение доставляет функционал $\phi \in L_\infty^*:\ \phi(h(\cdot)) = \int_{-T/2}^{+T/2} h(\tau)u(\tau)\, d\tau$, $h(\cdot) \in L_\infty$, для которого выполняются моментные равенства:

$$\phi(h_k(\cdot)) = c_k, \quad k = 1, 2, 3, \tag{4}$$

где $h_1(\tau) = (T/2 - \tau)^2/2$, $h_2(\tau) = T/2 - \tau$, $h_3(\tau) = 1$, $\forall \tau \in [t_0, t_f]$, а числа $c_1$, $c_2$, $c_3$ с учетом (2), $\Delta\gamma = \int_{-T/2}^{+T/2} (T/2 - \tau) f(\tau)\, d\tau$, $\Delta\omega = \int_{-T/2}^{+T/2} f(\tau)\, d\tau$ находятся по формулам

$$c_1 = \gamma_T - \Delta\gamma, \quad c_2 = -\Delta\omega, \quad c_3 = 0. \tag{5}$$

Для разрешающего (4), (5) функционала имеет место оценка $\|\phi\|_{L_\infty^*} = 1/\rho_0$, где $0 < \rho_0 = \|h_0(\cdot)\|_{L_\infty} \leqslant \|h(\cdot)\|_{L_\infty}$, а $h_0(\tau)$ — минимальный элемент [2].

В соответствии с принципом максимума [2], решение задачи оптимального управления (1)–(3) сводится к последовательному решению следующих задач: во-первых, определение нормы минимального элемента, а именно: $\min\{\max_\tau |h(\tau)|\} = \rho_0$ при условии, что $l_1c_1 + l_2c_2 + l_3c_3 = 1$, где

$$h(\tau) = l_1(T/2-\tau)^2/2 + l_2(T/2-\tau) + l_3, \tag{6}$$

во-вторых, синтез оптимального управления из условия

$$\max_{u(\cdot)} \int_{-T/2}^{+T/2} h_0(\tau)u(\tau)\,d\tau = 1, \quad \int_{-T/2}^{+T/2} |u(\tau)|\,d\tau = \frac{1}{\rho_0}. \tag{7}$$

Если $f(t) = 0$, то из (5) получим $c_1 = \gamma_T > 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$. Но тогда в (6) $l_1 = 1/c_1 = 1/\gamma_T$, а $l_2$ и $l_3$ произвольны. Решая первую задачу, получим как минимальный элемент $h_0(\tau) = (2\gamma_T)^{-1}(\tau^2 - T^2/8)$, так и его норму $\rho_0 = T^2/(16\gamma_T)$. Решения второй задачи (7) в классе допустимых управлений, т. е. в $L_1$, не существует, а приближенно оптимальное управление имеет следующий вид:

$$u_\varepsilon(\tau) = \begin{cases} a_0/\varepsilon_0, & \tau \in I_0 = [-T/2, -T/2+\varepsilon_0],\\ a_f/\varepsilon_f, & \tau \in I_f = [T/2-\varepsilon_f, T/2],\\ -a_m/(2\varepsilon_m), & \tau \in I_m = [-\varepsilon_m, +\varepsilon_m],\\ 0, & \tau \in [-T/2, +T/2] \setminus (I_0 \cup I_m \cup I_f), \end{cases} \tag{8}$$

где $\varepsilon_0$, $\varepsilon_f$ и $\varepsilon_m$ — достаточно малые числа (в сравнении с $T$), а $a_0 > 0$, $a_f > 0$, $a_m > 0$ — некоторые числа. Подставляя (8) в (7), при $(\varepsilon_0, \varepsilon_f, \varepsilon_m) \to 0$ получим в пределе (как для первого, так и для второго интегралов в (7)): $a_0 + a_f + a_m = 1/\rho_0 = 16\gamma_T/T^2$ — нижнюю грань расхода управления для (8) или, что то же самое, полный импульс управляющего воздействия [2]. Отметим, что в (8) при $(\varepsilon_0, \varepsilon_f, \varepsilon_m) \to 0$ «импульсы» вырождаются в $\delta$-функции.

Интегрируя последовательно третье и второе уравнения в (1) с учетом граничных условий (2) и переходя к пределу в (8), получим $a_0 + a_f - a_m = 0$ и $2a_0 - a_m = 0$, т. е. $a_0 = a_f$, $a_m = 2a_0$. Тогда в (8) числа $a_0 = a_f = 4\gamma_T/T^2$, $a_m = 8\gamma_T/T^2$ и $\delta$-импульсное оптимальное управление в задаче (1)–(3) имеет вид $u^*(\tau) = (4\gamma_T/T^2)[\delta(\tau+T/2) - 2\delta(\tau) + \delta(\tau - T/2)]$.

В общем случае, когда $f(t) \neq 0$, в (5) следует учесть, что $\Delta\gamma \neq 0$ и/или $\Delta\omega \neq 0$. Примем в качестве расчетной схемы программу $u_\delta(\tau) = \widetilde{a}_0\delta(\tau+T/2) - \widetilde{a}_m\delta(\tau) + \widetilde{a}_f\delta(\tau - T/2)$, где $\widetilde{a}_k = s_0a_k$, $a_k \geqslant 0$, $k = 0, f, m$, а $s_0 = \pm 1$.

Интегрируя уравнения системы (1) с нулевыми начальными условиями, получим линейную систему относительно $a_0$, $a_f$, $a_m$, решение которой доставляет значения этих коэффициентов: $a_0 = s_0[4(\gamma_T - \Delta\gamma) + T\Delta\omega]/T^2$, $a_m = s_0[8(\gamma_T - \Delta\gamma) + 4T\Delta\omega]/T^2$, $a_f = s_0[4(\gamma_T - \Delta\gamma) + 3T\Delta\omega]/T^2$. Соответственно, расход управления (3) будет равен $J(u_\delta) = 8s_0F/T^2 \geqslant 0$, где $F = 2(\gamma_T - \Delta\gamma) + T\Delta\omega$. Очевидно, что здесь $s_0 = \operatorname{sign} F$. С другой стороны, $J(u_\delta) = 1/\rho_0$, т. е. $h_0(\tau)$ в рассматриваемой задаче будет равна $\rho_0 = T^2/(8|F|)$, а минимальный элемент будет иметь следующий вид: $h_0(\tau) = s_0[\tau^2 - T^2/8]/|F|$.

В заключение отметим, что в силу $\rho_0 > 0$ должно выполняться условие $|F| > 0$. Но, возможен и такой вариант задания параметров маневра и $T$, что $F = 0$. В этом случае объект управления (1) на интервале $[-T/2, +T/2]$ совершает свободное движение и при этом автоматически выполняются граничные условия (2).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Раушенбах Б. В.*, *Токарь Е. Н.* Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974, 600 с.

2. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением: линейные системы. М.: Наука, 1965, 476 с.
3. *Мороз А. И.* Курс теории систем. М.: Высшая школа, 1987, 304 с.