ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 5
2012

О. В. Русаков (Санкт-Петербург, СПбГУ). **Суммы независимых неоднородных пуассоновских субординаторов.**

Пусть $(\xi) = \xi_0, \xi_1, \ldots$ — последовательность случайных величин, $\Pi = \Pi(s;\lambda)$ — стандартный пуассоновский случайный процесс с интенсивностью $\lambda > 0$ и временным параметром $s \in \mathbf{R}_+$. Процесс Π и последовательность (ξ) предполагаются независимыми.

Определение. *Пуассоновским субординатором* для последовательности (ξ) назовем следующий процесс ψ, полученным случайной пуассоновской заменой дискретного времени последовательности (ξ) на непрерывное время:

$$\psi = \psi(s;\lambda) = \xi_{\Pi(s;\lambda)}, \qquad s \in \mathbf{R}_+. \tag{1}$$

Последовательность (ξ) назовем *формирующей*, процесс Π — *управляющим*, а полученный процесс ψ — *процессом пуассоновского случайного индекса ПСИ.*

Рассмотрим случай, когда случайные величины формирующей последовательности принадлежат области притяжения нормального закона, независимы, одинаково распределены, центрированы и надлежащим образом нормированы. В этом случае имеет место экспоненциальное убывании автоковариации процесса ПСИ,

$$\operatorname{cov}(\psi(s_1), \psi(s_2)) = e^{-\lambda|s_1-s_2|}, \qquad s_1, s_2 \in \mathbf{R}_+. \tag{2}$$

Данное показательное убывание (2) для ковариации является основным фактом, устанавливающим следующую сходимость конечномерных распределений.

Рассмотрим $(\psi_j(s;\lambda))$ ($j \in \mathbf{N}$) — независимые копии процесса $\psi(s)$, полученного в соответствии с (1). Рассмотрим суммы данных процессов ПСИ, предварительно нормировав элементы формирующих последовательностей на $\sqrt{N}$,

$$Z_N(s;\lambda) = \sum_{j=1}^{N} \psi_j(s;\lambda), \qquad s \in \mathbf{R}_+. \tag{3}$$

Лемма. *Конечномерные распределения процесса* $Z_N(s;\lambda)$, *определенного* (3), *сходятся при* $N \to \infty$ *к конечномерным распределениям стандартного процесса Орнштейна–Уленбека* $U(s;\lambda)$ *— центрированной гауссовской функции на* $[0,\infty) \ni s$ *с ковариацией* $\operatorname{cov}(U(s_1;\lambda), U(s_2;\lambda)) = e^{-\lambda|s_1-s_2|}$, $s_1, s_2 \in \mathbf{R}_+$.

Замечание. В условиях данной леммы имеет место и более сильная сходимость — в пространстве Скорохода, но для дальнейших целей нам понадобится только факт, установленный в лемме.

Рассматривается задача, когда по-прежнему процессы ПСИ в сумме (3) независимы, но получены субординацией пуассоновских процессов разной интенсивности.

Рассмотрим последовательность «эмпирических» мер (μ_N), $N \in \mathbf{N}$, каждая из которых имеет $m = m(N)$ атомов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, сосредоточенных на открытой правой полуоси $(0, +\infty)$. При этом допустим, что вероятность атома λ_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, равна N_j/N, $N_j = N_j(N)$ и $N_1 + N_2 + \dots + N_m = N$. Следующее утверждение устанавливает связь преобразования Лапласа эмпирической меры μ с ковариационной функцией гауссовского предельного процесса для сумм неоднородных пуассоновских субординаторов.

Теорема. *Пусть преобразования Лапласа мер* (μ_N) *сходятся при* $N \to \infty$ *к преобразованию Лапласа* $f(s)$, $s \in \mathbf{R}_+$, *некоторой вероятностной меры, сосредоточенной на* $(0, +\infty)$. *Пусть* $\Lambda(s) = -\log f(s)$ *есть кумулянта этой предельной вероятностной меры. Тогда конечномерные распределения стационарных процессов*

$$Z_N(s; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \sum_{j=1}^{N_1} \psi_j(s; \lambda_1) + \dots + \sum_{j=1}^{N_m} \psi_j(s; \lambda_m), \qquad s \in \mathbf{R}_+,$$

сходятся к конечномерным распределениям центрированного гауссовского стационарного процесса с ковариационной функцией $f(s) = e^{-\Lambda(s)}$.