ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 5
2012

Н. В. Карапетян (Москва, МГУ). **Предельное распределение нормированного времени до разорения.**

Рассматривается модель работы страховой компании с дискретным временем. Начальный капитал компании есть неотрицательное целое число x. За единицу времени капитал может измениться на 1 с вероятностью p, уменьшиться на 1 с вероятностью q и остаться неизменным с вероятностью r. Компания использует барьерную стратегию выплаты дивидендов: если капитал компании ниже дивидендного барьера $n \in \mathbf{N}$ ($n \geqslant x$), то ничего не выплачивается, а как только капитал компании достигает уровня n, все отдается в качестве дивидендов. Обозначим η_x время работы компании до разорения при начальном капитале x и уровне выплаты дивидендов n и воспользуемся методом производящих функций для исследования поведения нормированной случайной величины $\tau_x = \eta_x / \mathbf{E}\,\eta_x$ при $r \to 1$. Среднее время работы компании до разорения находится с помощью разностных уравнений.

Лемма. *Пусть $u_{x,k}$ — вероятность того, что компания разорится за время k. Производящая функция $U_x(s) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{x,k} s^k$ времени до разорения представляется в виде*

$$U_x(s) = \left(\frac{q}{p}\right)^{x+1} \frac{(\lambda_1(s)-1)\lambda_1^{n-x}(s) + (1-\lambda_2(s))\lambda_2^{n-x}(s)}{(\lambda_1(s)-1)\lambda_1^{n+1}(s) + (1-\lambda_2(s))\lambda_2^{n+1}(s)},$$

где $\lambda_{1,2}(s)$ — корни квадратного уравнения $ps\lambda^2(s) + (rs-1)\lambda(s) + qs = 0$.

Теорема. *Пусть x — начальный капитал, а $n \geqslant x$ — уровень выплаты дивидендов. Тогда если $p = q$, то при $r \to 1$ предельное распределение τ_x есть смесь $(n-x+1)$ распределений, где k-е распределение $(k = 0, 1, \ldots, n-x)$ представляет из себя свертку $(n-k+1)$ экспоненциального распределения с параметрами $(-x^2 + (2n+1)x + 2(n+1))(1 - \cos((2j+1)\pi/(2n+3)))$, $j = k, k+1, \ldots, n$. Если $p \neq q$, то при $r \to 1$ предельное распределение τ_x*

1) *является экспоненциальным с параметром 1, если $qp^{-1} \to 0$;*

2) *является суммой $x+1$ экспоненциально распределенной случайной величины с параметром $x+1$, если $qp^{-1} \to \infty$;*

3) *обладает плотностью $p(u) = \sum_{k=1}^{n+1} S_{n-x}(\gamma_k)(H_k(\gamma_k))^{-1} e^{\gamma_k u}$, если $qp^{-1} \to d \neq 0$ или 1. Здесь γ_k $(k = 1, 2, \ldots, n+1)$ — корни уравнения $S_{n+1}(u) = 0$,*

$$H_k(u) = \frac{S_{n+1}(u)}{u - \gamma_k} \quad \text{и} \quad \widehat{S}_m(u) = \frac{(\mu_1 - 1)\mu_1^m + (1-\mu_2)\mu_2^m}{\mu_1 - \mu_2},$$

где $c = (d-1)^2((d-1)(x+1) + d^{-n-1} - d^{x-n})^{-1}$, $\mu_{1,2} = w \pm \sqrt{w^2 - d}$, $w = (d+1+cu)/2$.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, профессору Е. В. Булинской за помощь в постановке задачи и полезные замечания в процессе работы.