

**А. К. Горшенин** (Москва, ИПИ РАН). **Вероятностно-статистический подход в спектральном анализе.**

Методология получения дополнительной информации о процессах, происходящих в той или иной системе, по изучению формы и характерных особенностей спектров чрезвычайно развита в различных областях. В качестве примеров можно привести оптику, физику турбулентной плазмы. Для выделения параметров тех или иных процессов спектр, измеренный в эксперименте при помощи спектрометра, спектрографа, или оцененный по временной выборке аналого-цифрового преобразователя, необходимо разделить на составляющие, т. е. выделить сплошной спектр, полосы, отдельные компоненты. Однако, несмотря на востребованность применения указанного подхода, существуют проблемы, связанные с возможностью неоднозначной интерпретации результатов экспериментов. Причиной является тот факт, сама по себе задача выявления компонент спектра является некорректной и требует дополнительных предположений, в рамках которых решение может быть найдено. Однако именно анализ спектра дает возможность определить тип неустойчивости, механизм формирования турбулентности, доли ионно-звуковых солитонов и дрейфовых вихрей в турбулентной плазме. Ранее идентификация спектра не могла быть проведена, потому что при известном числе процессов, форма гармоник в амплитудном спектре осталась неизвестной. При этом хорошо известно, что плазменная турбулентность описывается моделями на основе процессов Кокса [1]. В работе [2] для изучения комплексных частотных спектров флуктуаций для оценки скорости их движения (суммарной фазовой и полоидальной) по частотному сдвигу, а также выделения стохастических процессов была предложена специальная бутстреп-процедура.

В рамках предложенной процедуры спектр интерпретируется как плотность некоторого неизвестного вероятностного распределения, функцию распределения которого обозначим через  $\mathcal{F}$ . Теперь найдем квантиль  $x_\alpha$  порядка  $\alpha$  для функции распределения  $\mathcal{F}$ . Поступая так необходимое число раз, сформируем выборку заранее заданного объема  $\mathcal{X}$  из неизвестного распределения  $\mathcal{F}$ . Далее, по этой выборке с помощью классического EM-алгоритма (см., например, работу [3]) найдем оценки максимального правдоподобия параметров, предполагая, что неизвестное распределение представляет собой конечную сдвиг-масштабную смесь нормальных законов, то есть

$$\mathcal{F} = \sum_{i=1}^k p_i \Phi\left(\frac{x - a_i}{\sigma_i}\right), \quad (1)$$

где

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(y) dy, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}$$

— соответственно функция распределения и плотность стандартного нормального закона,  $k \geq 1$  — известное натуральное число,  $p_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^k p_i = 1$ ,  $a_i \in \mathbf{R}$ ,

$\sigma_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Величины  $\Phi_1, \dots, \Phi_k$  называются компонентами смеси, параметры  $p_1, \dots, p_k$  — весами соответствующих компонент. Задачей разделения смеси (1) принято называть задачу статистического оценивания неизвестных параметров  $p_i$ ,  $a_i$  и  $\sigma_i$  по выборке. В итоге получим модель для приближения спектра и соответствующие компоненты.

В настоящей работе приводятся итоги исследования эффективности разработанного подхода для данных, полученных для двух типов низкочастотной плазменной турбулентности на краю и в центре плазменного шнура в стеллараторе Л-2М [4]. Непосредственно алгоритм реализован на встроеном языке программирования MATLAB.

Продемонстрированные результаты свидетельствуют о перспективности применения данного метода для исследования тонкой структуры стохастических процессов. Он позволяет достаточно хорошо приблизить спектр и разделить его на компоненты. При этом их число и форма сохраняются внутри характерных областей в серии. Полученное число значимых компонент в разложении спектра хорошо согласуется с физической сутью изучаемых процессов, так как в реальных данных количество формирующих процессов хоть и велико, но значимыми оказываются не более 3–4 компонент (см., например, работу [1]). С помощью физической интерпретации компонент появляется возможность построения более точных моделей функционирования турбулентной плазмы.

Помимо модели, основанной на смесях нормальных законов, достаточно разумным представляется использование и смесей гамма-распределений из-за энтропийные свойства гамма-распределения и схожести формы одностороннего спектра с видом соответствующей плотности распределения (пример применения в области анализа информационных потоков может быть найден в работе [5]), что открывает новые возможности для проведения дальнейших исследований.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12-07-31267).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Batanov G. M., Gorshenin A. K., Korolev V. Yu., Malakhov D. V., Skvortsova N. N.* The evolution of probability characteristics of low-frequency plasma turbulence. — *Math. Models Comput. Simul.*, 2012, v. 4, № 1, p. 10–25.
2. *Горшенин А. К., Королев В. Ю., Малахов Д. В., Скворцова Н. Н.* Анализ тонкой стохастической структуры хаотических процессов с помощью ядерных оценок. — *Матем. моделирование*, 2011, т. 23, № 4, с. 83–89.
3. *Dempster A., Laird N., Rubin D.* Maximum likelihood estimation from incomplete data. — *J. Roy. Statist. Soc.*, 1977, Ser. B. v. 39(1), p. 1–38.
4. *Gorshenin A. K., Malakhov D. V.* Evolution of histograms and Fourier spectra in structural plasma turbulence in L-2M stellarator. — In: XXX International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models and VI International Workshop «Applied Problems in Theory of Probabilities and Mathematical Statistics Related to Modeling of Information Systems». Abstracts of Communications. M.: Inst. Inform. Problems RAS, 2012, p. 26–27.
5. *Gorshenin A., Doynikov A., Korolev V., Kuzmin V.* Statistical Properties of the Dynamics of Order Books: Empirical Results. — In: VI International Workshop «Applied Problems in Theory of Probabilities and Mathematical Statistics Related to Modeling of Information Systems» (Autumn Session, 2012). Abstracts of Communications. M.: Inst. Inform. Problems RAS, 2012, p. 31–51.