ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 5
2012

В. И. Аркин, А. Д. Сластников (Москва, ЦЭМИ РАН). **Инвестирование рискованных проектов в условиях государственных гарантий.**

Общую схему рассматриваемой модели можно описать следующим образом.

Имеется проект, который после своего финансирования начинает приносить некоторый поток прибыли. Проект, однако, является рискованным, т. е. после инвестирования он может (с какой-то вероятностью) потерпеть неудачу, так и не начиная функционировать. Для финансирования проекта инвестору необходимо взять кредит в банке. При этом в случае неудачи проекта кредит не возвращается. Поскольку у рискованного проекта существует вероятность невозврата кредита, соответствующая процентная ставка кредита может быть достаточно высокой, но банк готов ее уменьшить при снижении риска невозврата кредита. С целью снижения процентной ставки по кредиту и тем самым стимулирования инвестора государство гарантирует банку возврат (в случае неудачи проекта) определенной доли предоставленных проекту кредитов.

В настоящей работе исследуется проблема выбора величины государственных гарантий.

1. Базовая модель. В основе работы лежит модель инвестиционных ожиданий [1], опирающаяся на теорию реальных опционов (см., например, [2]).

Пусть I есть объем инвестиций, необходимых для реализации проекта. Ради простоты будем считать, что они носят единовременный характер и сразу после инвестирования начинают приносить прибыль.

Проект является рискованным в том смысле, что после инвестирования он начинает свое функционирование с вероятностью p, $0 < p < 1$, а с дополнительной вероятностью $q = 1 - p$ остается нереализованным (терпит неудачу).

В каждый момент времени инвестор может либо сделать вложения в проект, либо отложить решение об инвестировании до наступления более благоприятного момента. Пусть τ обозначает момент инвестирования проекта.

Предполагается, что вся сумма необходимых инвестиций берется в кредит под процент λ (годовых). Возврат самого кредита и начисленных по нему процентов начинается сразу после начала функционирования проекта. Пусть $k_\tau(\lambda)$ есть общие выплаты по кредиту (включая основные выплаты и проценты), приведенные к моменту τ, приходящиеся на единицу кредита, т.е. общая сумма выплат за кредит равна $k_\tau(\lambda)I$. Если график возврата основного тела кредита (без учета процентов) описывается с помощью плотности потока платежей (на единицу кредита) $f_t \geqslant 0$, $0 \leqslant t \leqslant L$: $\int_0^L f_t dt = 1$ (L — срок предоставления кредита), то нетрудно показать, что $k_\tau(\lambda) = 1 + (\lambda - \rho)(1 - F)/\rho$, где ρ — коэффициент дисконтирования, а $F = \int_0^L f_t e^{-\rho t} dt$ (см., например, [3]). Естественно при этом предполагать, что $\lambda > \rho$.

В случае, когда проект после финансирования остался нереализованным (потерпел неудачу), кредит инвестором не возвращается, однако банк получает от государства компенсацию (гарантированный возврат) в виде доли θ от суммы выданного кредита, т. е. θI. Достаточно естественным выглядит предположение, что с ростом доли «гарантированного возврата» процент, под который выдается кредит, уменьшается. Поэтому будем полагать, что $\lambda = \lambda(\theta)$ как функция от доли возврата θ монотонно убывает.

Срок жизни проекта для простоты считается бесконечным, а поток прибыли описывается с помощью случайного процесса $\pi_t,\ t \geqslant 0$, заданного на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t,\ t \geqslant 0\}, \mathbf{P})$ и согласованного с потоком σ-алгебр $\mathcal{F}_t$ ("историей" системы до момента t).

Будем обозначать через γ долю прибыли, идущую на уплату налогов (налоговая нагрузка проекта).

Тогда ожидаемый чистый доход инвестора от проекта, приведенный к моменту инвестирования τ, равен:

$$V_\tau = p\mathbf{E}\left(\int_\tau^\infty (1-\gamma)\pi_t e^{-\rho(t-\tau)}dt \,\middle|\, \mathcal{F}_\tau\right) - pk_\tau(\lambda)I.$$

2. Выбор оптимального момента инвестирования. Поведение инвестора предполагается рациональным в том смысле, что, наблюдая (в каждый момент времени) информацию о сложившихся рыночных ценах и прогнозе будущего потока прибыли от проекта, он может либо принять решение об инвестировании, либо отложить его до наступления более благоприятной ситуации. Задача инвестора состоит в том, чтобы на основе указанной выше информации выбрать момент инвестирования τ таким образом, чтобы ожидаемый чистый доход инвестора от проекта, приведенный к нулевому (базовому) моменту времени (NPV), был максимальным:

$$\mathbf{E}V_\tau e^{-\rho\tau} \to \max_\tau, \tag{1}$$

где максимум берется по всем марковским (относительно потока σ-алгебр $\mathcal{F}_t$) моментам τ. Этот момент инвестирования (правило инвестирования) и определяет поведение инвестора.

Будем предполагать, что общие выплаты по кредиту (на единицу кредита) $k_\tau(\lambda)$ не зависят от момента инвестирования τ, т. е. $k_\tau(\lambda) = k(\lambda)$, а поток прибыли описывается процессом геометрического броуновского движения с темпом роста $\alpha,\ \alpha < \rho$, и волатильностью (характеризующей неопределенность) σ:

$$d\pi_t = \pi_t(\alpha dt + \sigma dw_t),\ t \geqslant 0; \quad w_t \text{ — винеровский процесс.}$$

Теорема 1. *Оптимальный момент инвестирования в задаче* (1) *равен* $\tau^* = \min\{t \geqslant 0:\ \pi_t \geqslant \pi^*\}$, *где*

$$\pi^* = \frac{\beta}{\beta-1}\cdot\frac{\rho-\alpha}{1-\gamma}\cdot k(\lambda)I, \tag{2}$$

а β *есть положительный корень уравнения* $\frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1)+\alpha\beta-\rho = 0$.

3. Задача бюджетной эффективности доли гарантированного возврата кредита. Как уже отмечалось выше, величина доли θ кредита, возвращаемого государством банку в случае неудачи проекта, влияет на процент $\lambda = \lambda(\theta)$, под который банк выдает кредит на инвестиционный проект, и тем самым определяет оптимальный момент инвестирования $\tau^* = \tau^*(\theta)$ (см. теорему 1).

Поскольку использование механизма государственных гарантий инвестиций в рискованные проекты связано с прямыми затратами бюджетных средств, возникает естественная проблема выбора «рационального» (в каком-то смысле) механизма. Одним из наиболее естественных требований к величине государственных гарантий является условие неотрицательности ожидаемого (среднего) бюджетного эффекта при оптимальном поведении инвестора. Под бюджетным эффектом в данной работе мы будем понимать величину, равную разности между ожидаемыми дисконтированными налоговыми поступлениям от проекта и ожидаемыми затратами государства по возврату банку соответствующей доли выданного кредита.

В рамках описанной выше модели ожидаемый бюджетный эффект от проекта (при доле возврата θ и оптимальном поведении инвестора) равен

$$B(\theta) = \mathbf{E}e^{-\rho\tau^*}\left(p\int_{\tau^*}^{\infty}\gamma\pi_t e^{-\rho(t-\tau^*)}dt - q\theta I\right). \tag{3}$$

Будем говорить, что доля θ государственных гарантий является бюджетно-эффективной, если $B(\theta) \geqslant 0$.

Пусть задано множество допустимых (в силу законодательных или иных ограничений) долей государственных гарантий $\Theta = \{\underline{\theta} \leqslant \theta \leqslant \overline{\theta}\}$.

Нас будут интересовать следующие вопросы:

1) при каких условиях существует бюджетно-эффективная допустимая доля государственных гарантий?

2) какие допустимые доли государственных гарантий будут бюджетно-эффективными?

Обозначим $l(\theta) = k(\lambda(\theta))$ — приведенные общие выплаты инвестора за единицу кредита как функцию от доли возврата θ . В силу естественных предположений о возрастании кредитных выплат k по проценту λ и убывании процента по доле возврата θ функция $l(\theta)$ будет монотонно убывающей.

Следующая теорема дает полные ответы на поставленные выше вопросы.

Теорема 2. i) *Для существования бюджетно-эффективной доли государственных гарантий на множестве* Θ *необходимо и достаточно выполнения неравенства*

$$\frac{p}{1-p}\cdot\frac{\beta}{\beta-1}\cdot\frac{\gamma}{1-\gamma}\cdot l(\underline{\theta}) \geqslant \underline{\theta}. \tag{4}$$

ii) *Если выполнено условие* (4), *то допустимая доля государственных гарантий* $\theta \in \Theta$ *будет бюджетно-эффективной в том и только том случае, когда* $\theta \leqslant \theta^*$, *где* θ^* *— единственное решение (при* $\theta \geqslant \underline{\theta}$ *) уравнения*

$$\frac{p}{1-p}\cdot\frac{\beta}{\beta-1}\cdot\frac{\gamma}{1-\gamma}\cdot l(\theta) = \theta. \tag{5}$$

4. Об одном способе определения кредитной политики банка. При определении политики выплат по кредиту на финансирование инвестиционного проекта банк может руководствоваться следующими оптимизационными соображениями. В рамках приведенной здесь модели ожидаемую прибыль банка от данного инвестиционного проекта можно определить как

$$C(m) = \mathbf{E}e^{-\rho\tau^*}(pmI + q\theta I - I),$$

где τ^* — оптимальный момент инвестирования проекта, совпадающий с моментом получения кредита и началом выплат по нему; а $m = k(\lambda)$ — приведенные общие выплаты банку за единицу кредита. Теперь оптимальную кредитную политику (в отношении данного инвестиционного проекта) можно охарактеризовать с помощью решения задачи

$$C(m) \to \max_{\underline{m}\leqslant m\leqslant\overline{m}}, \tag{6}$$

где максимум берется по всем приведенным кредитным выплатам m из заданного допустимого множества $\underline{m} \leqslant m \leqslant \overline{m}$.

Из теоремы 1 можно вывести, что $C(m) = cm^{-\beta}(pm + q\theta - 1)$, где $c = [\pi_0(\beta - 1)(1-\gamma)]^{\beta}[(\rho-\alpha)\beta]^{-\beta}I^{1-\beta}$. Поэтому решение m^* задачи (6) имеет следующий вид:

$$m^* = \underline{m}\chi_{\{\widehat{m}<\underline{m}\}} + \widehat{m}\chi_{\{\underline{m}\leqslant\widehat{m}\leqslant\overline{m}\}} + \overline{m}\chi_{\{\widehat{m}>\overline{m}\}}, \qquad \text{где } \widehat{m} = \frac{\beta}{\beta-1}\cdot\frac{1-q\theta}{p},$$

а χ_A — индикаторная функция множества A.

Отметим, что полученная оптимальные приведенные кредитные выплаты m^* линейно зависят от доли возврата кредита θ и монотонно убывает по θ. В этом случае границу θ^* бюджетно-эффективных долей государственных гарантий можно выписать в явном виде:

$$\theta^* = \frac{1}{1-p}\cdot\frac{a}{1+a}, \qquad \text{где } a = \left(\frac{\beta}{\beta-1}\right)^2\cdot\frac{\gamma}{1-\gamma}. \tag{7}$$

5. Некоторые замечания. Из уравнения (5) следует, что критическое значение θ^*, определяющее область бюджетно-эффективных долей госгарантий, увеличивается с ростом вероятности p успешной реализации проекта, коэффициента налоговой нагрузки на проект γ (что достаточно понятно из интуитивных соображений) и убывает по параметру β.

Поскольку β монотонно убывает по волатильности σ процесса прибыли, то критическая доля госгарантий θ^* будет возрастать по σ. Это означает, что с ростом неопределенности прибыли от реализованного проекта возможности государства по стимулированию инвестирования рискованных проектов с помощью механизма государственных гарантий увеличиваются. Этот факт уже не совсем укладывается в рамки привычной экономической интуиции.

Работа выполнена при поддержке РГНФ (проект 10-02-00271) и РФФИ (проект 11-06-00109).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аркин В. И.*, *Сластников А. Д.* Инвестиционные ожидания, стимулирование инвестиций и налоговые реформы. — Эконом. матем. методы, 2007, т 43, в. 2, с. 76–100.
2. *Dixit A. K.*, *Pindyck R. S.* Investment under Uncertainty. Princeton: Princeton University Press, 1994.
3. *Аркин В. И.*, *Сластников А. Д.* Выбор момента инвестирования в условиях неопределенности с учетом налоговой среды и механизма кредитования. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2010, т. 17, в. 5, с. 685-688.