ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 20 МАТЕМАТИКИ Выпуск 3
2013

А. А. Голдаева (Москва, МГУ). **Тяжелые хвосты, экстремумы и кластеры стохастических рекуррентных последовательностей.**

Рассмотрим процесс Y_n, $n \geqslant 1$, удовлетворяющий стохастическому рекуррентному уравнению

$$Y_n = A_n Y_{n-1} + B_n, \quad n \geqslant 1, \quad Y_0 \geqslant 0, \tag{1}$$

где (A_n, B_n), $n \geqslant 1$, — независимые одинаково распределенные пары неотрицательных случайных величин.

Стационарные процессы вида (1) обладают (при некоторых дополнительных условиях) двумя важными свойствами: 1) стационарное распределение имеет степенной хвост; 2) максимум $M_n = \max\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ при $n \to \infty$ растет асимптотически как максимум $[\theta n]$ независимых случайных величин с тем же распределением. При этом превышения высокого уровня образуют кластеры со средним размером $1/\theta$. Нас будут интересовать две числовые характеристики: индекс хвоста κ и экстремальный индекс θ. Их изучали в работе [1], где доказана фундаментальная теорема, которая, к сожалению, в общем случае не дает явных формул.

Автором исследованы случаи, когда один или оба индекса можно получить в явном виде. При некоторых условиях доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $A_n \stackrel{d}{=} e^{a\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}\xi}$, *где* $\xi \sim \mathbf{N}(0,1)$, *случайная величина* $\Delta \geqslant 0$, *не зависит от* ξ *и* $\mathbf{E}\,\Delta^{-2a/\sigma^2+1} < \infty$, $a < 0$, $\sigma > 0$. *Тогда* $\kappa = -2a/\sigma^2$.

Теорема 2. *Имеет место оценка* $\theta \leqslant \mu\, 2a^2/\sigma^2$, *где* $\mu = \mathbf{E}\,\Delta$.

Теорема 3. *Если* $\Delta \stackrel{d}{=} \mu\Delta_0$, *где* $\mathbf{E}\,\Delta_0 = 1$, *то экстремальный индекс* θ *зависит только от величины* $a\sqrt{\mu}/\sigma$.

Теорема 4. *Пусть величины* $Z_n = \ln A_n$ *имеют распределение с плотностью*

$$g_Z(x) = \begin{cases} r\alpha e^{\alpha x}, & x < 0, \\ (1-r)\beta e^{-\beta x} & x \geqslant 0, \end{cases} \quad \alpha, \beta > 0, \quad 0 < r < 1.$$

Тогда $\kappa = r(\alpha+\beta) - \alpha$ *при* $r > \alpha/(\alpha+\beta)$ *и* $\theta = \kappa^2/(r\beta(\alpha+\beta))$.

Кроме того, в некоторых случаях выведены рекуррентные формулы для расчета распределений размеров кластеров превышений высокого уровня, получены верхние и нижние границы для экстремального индекса, доказаны некоторые предельные теоремы о сходимости индексов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 11-01-00050.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Haan L. de*, *Resnick S.*, *Rootzén H.*, *Vries G. de.* Extremal behaviour of solutions to a stochastic difference equation with applications to ARCH processes. — Stoch. Process. Appl., 1989, v. 32, p. 213–224.

2. *Klüppelberg C.* Risk Management and Extreme Value Theory. — In: Extreme Values in Finance, Telecommunication and the Environment, Clapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2002, p. 101–168.
3. *Голдаева А. А.* Использование процессов с непрерывным временем в исследовании стохастических рекуррентных последовательностей. — Вестник Московского ун-та. Сер. матем. мех., 2010, № 6, с. 13–18.
4. *Голдаева А. А.* Равномерная оценка экстремального индекса стохастических рекуррентных последовательностей. — Вестник Московского ун-та. Сер. матем. мех., 2012, № 2, с. 51–55.