ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 20 МАТЕМАТИКИ Выпуск 3
2013

В. И. М а с о л, С. Я. С л о б о д я н (Киев, Киевский национальный ун-т, Ивано-Франковск, Прикарпатский национальный ун-т). **Нормальное предельное распределение нормированного числа посторонних решений совместной системы нелинейных случайных уравнений над полем GF(2).**

Рассмотрим над полем GF(2) систему уравнений

$$\sum_{k=1}^{g_q(n)} \sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant n} a^{(q)}_{j_1\cdots j_k} x_{j_1}\cdots x_{j_k} = b_q, \qquad q=1,2,\ldots,N, \tag{1}$$

удовлетворяющую условию (A):

1) коэффициенты $a^{(q)}_{j_1\cdots j_k}$ $(1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant n,\ k=1,2,\ldots,g_q(n),\ q=1,2,\ldots,N)$ — независимые случайные величины с распределением $\mathbf{P}\{a^{(q)}_{j_1\cdots j_k}=1\} = 1-\mathbf{P}\{a^{(q)}_{j_1\cdots j_k}=0\} = p_{qk}$;

2) элементы b_q, $q=1,2,\ldots,N$, представляют собою результат подстановки в левую часть системы (1) фиксированного n-мерного (0,1)-вектора $\overline{x}^{(0)}$;

3) функция $g_q(n)$ — неслучайная, $g_q(n)\in\{2,3,\ldots,n\}$, $q=1,2,\ldots,N$.

Обозначим $M(\overline{x}^{(0)}, f(n))$ совокупность всех таких n-мерных (0,1)-векторов $\overline{x}$, что $\overline{x}\neq\overline{x}^{(0)}$, $|\overline{x}|\geqslant f(n)$, где $|\overline{x}|$ — число ненулевых компонент вектора $\overline{x}$, $f(n)\in\{0,1,2,\ldots,n\}$. Решения системы (1), принадлежащие множеству $M(\overline{x}^{(0)}, f(n))$, будем называть *посторонними*, и для их числа примем запись ν_n.

Теорема. *Пусть выполняются условия* (A), *параметры* $n, N\to\infty$ *так, что* $2^{n-N}=[\lambda]$, *где*

$$\lambda = \frac{1}{\upsilon(1+\alpha+\omega)}\log_2\frac{n}{\beta f(n)\log_2 n},$$

$\upsilon=\upsilon(n)$, $\upsilon\geqslant 2$, $\alpha=\alpha(n)$, $\omega=\omega(n)$, $\beta=\beta(n)$, $\beta\geqslant c_0>2\ln 2$, $c_0=\mathrm{const}$, $[\cdot]$ — *знак целой части,* $\lambda\to\infty$, $\omega\sqrt{\lambda}\to\infty$; *для произвольного* q, $q=1,2,\ldots,N$, *существует такое непустое множество* T_q, *что* $T_q\subseteq\{2,3,\ldots,g_q(n)\}\cap\{2,3,\ldots,f(n)\}$, $1/2-\delta_{qt}\leqslant p_{qt}\leqslant 1/2+\delta_{qt}$, $\delta_{qt}=\delta_{qt}(n)$, $t\in T_q$;

$$(2+(1+\alpha+\omega)\ln 2)\lambda - \frac{\ln\lambda}{2} + \ln\left(\sum_{q=1}^{N}\prod_{t\in T_q} 2\delta_{qt}\right)\to-\infty, \quad (\alpha-1)\,\lambda\, u(\alpha)\geqslant c_1>-\infty,$$

где $c_1=\mathrm{const}$, $u(\alpha)=(\alpha-1)^{-1}(\alpha\ln\alpha-\alpha-1)$ *при* $2>\ln\alpha>0$ *и* $u(\alpha)=\ln\alpha-1$ *при* $\ln\alpha\geqslant 2$.

Тогда функция распределения случайной величины $(\nu_n-\lambda)/\sqrt{\lambda}$ *сходится при* $n\to\infty$ *к стандартной нормальной функции распределения.*

В докладе предлагается доказательство теоремы, основанное на проверке условий следующей леммы.

Лемма. *Пусть* X *и* Y *— неотрицательные целочисленные случайные величины и* $\mathbf{M}\,X = \lambda^*$ *. Если* $\mathbf{M}\,(Y)_r \leqslant C(\lambda^*)^r$ *при всех* $r \leqslant (\alpha+\gamma)\lambda^*$ *для некоторой константы* C*, где* $\mathbf{M}\,(\xi)_r$ *—* r *-й факториальный момент случайной величини* ξ*,* $r \geqslant 1$*, и* $\underline{\lim}_{n\to\infty}(\alpha-1)\lambda^* u(\alpha) \geqslant c_1 > -\infty$ *при* $\lambda^* \to \infty$*, где* c_1*,* $u(\alpha)$*,* α *определены в теореме,* $\gamma \geqslant 0$*,* $\max_{1\leqslant r\leqslant(\alpha+\gamma)\lambda^*} |\mathbf{M}\,(X)_r(\mathbf{M}\,(Y)_r)^{-1} - 1| e^{2\lambda^*}/\sqrt{\lambda^*} \to 0$*, то* $\max_{0\leqslant t\leqslant \gamma\lambda^*} |\mathbf{P}\,\{X \geqslant t\} - \mathbf{P}\,\{Y \geqslant t\}| \to 0$*,* $\lambda^* \to \infty$.

З а м е ч а н и е. Для $\alpha = 5$ и $\gamma = 2$ лемма установлена в [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Михайлов В. Г.* Предельные теоремы для числа ненулевых решений одной системы случайных уравнений над полем GF(2). — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, в. 3, с. 598–606.