ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 20 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2
2013

В. М. Хаметов, Е. А. Шелемех, Е. В. Ясонов (Москва, МИЭМ НИУ ВШЭ). **Минимаксное хеджирование американского опциона на неполном рынке с конечным горизонтом — это задача об оптимальной остановке.**

Известно (например, [1–2]), что верхняя цена американского опциона на неполном рынке совпадает с верхней гранью ожидаемой выплаты по опциону по множествам эквивалентных мартингальных мер и моментов остановки. В данной работе мы приводим условия, при выполнении которых существует единственная дискретная мартингальная вероятностная мера Q^* и момент остановки τ^* такие, что верхняя цена американского опциона является ценой задачи об оптимальной остановке [3] относительно Q^*, а τ^* — оптимальный момент остановки.

1. Постановка вспомогательной задачи. Пусть на стохастическом базисе $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0},\mathsf{P})$ имеется $\{1,\overline{S}\}$-рынок [1], [2], где $(S_n,\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ — d-мерная последовательность, описывающая эволюцию цен d рисковых активов, $d<\infty$. Положим $\mathcal{F}_n\triangleq\sigma\{S_0,\dots,S_n\}$. Обозначим: i) $S_0^n\triangleq(S_0,\dots,S_n)$; ii) $\mathfrak{R}_N\triangleq\{\mathsf{Q}:\mathsf{Q}\sim\mathsf{P}\}$ ($\mathsf{P}\in\mathfrak{R}_N$); iii) $\mathfrak{M}_N$ — множество мартингальных мер; iv) $\overline{\mathfrak{R}}_N$ — замыкание множества $\mathfrak{R}_N$ в топологии слабой сходимости вероятностных мер. Будем предполагать, что $\{1,\overline{S}\}$-рынок является неполным, т. е. $|\mathfrak{R}_N\cap\mathfrak{M}_N|>1$ (см. [1], [2]). Пусть: i) $\mathcal{T}_n^N$ — множество моментов остановки τ относительно фильтрации $(\mathcal{F}_m)_{m\geqslant n}$, принимающих значения в множестве $\{n,\dots,N\}$, где N — горизонт, n, $N\in\mathbf{Z}^+$; ii) $\{f_n\}_{0\leqslant n\leqslant N}$ — последовательность $\mathcal{F}_n$-измеримых ограниченных случайных величин — динамическое платежное обязательство; iii) $\{\gamma_n\}_{0\leqslant n\leqslant N}$ — d-мерная $\mathcal{F}$-предсказуемая последовательность, i-ая компанента которого $\gamma_n^{(i)}$ — количество i-ого рискового актива в момент времени n; iv) D_n^N — множество матриц $\gamma_n^N\triangleq(\gamma_n,\dots,\gamma_N)$, $0\leqslant n\leqslant N$; v) SF — множество самофинансирующих портфелей [1].

Обозначим: i) для любых $((\mathsf{Q},\tau),\gamma_{n+1}^N)\in(\mathfrak{R}\times\mathcal{T}_n^N,D_{n+1}^N)$ $\mathcal{F}_n$-измеримую случайную величину $I^{(\mathsf{Q},\tau\wedge N),\gamma_{n+1}^{\tau\wedge N}}(n,S_0^n)\triangleq\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[\exp\{f_{\tau\wedge N}-\sum_{i=n+1}^{\tau\wedge N}(\gamma_i,\triangle S_i)\}|\mathcal{F}_n]$, $\widehat{D}_{n+1}^N\triangleq\{\gamma_{n+1}^N\in D_{n+1}^N : I^{(\mathsf{Q},\tau\wedge N),\gamma_{n+1}^{\tau\wedge N}}(n,S_0^n)<\infty\ \mathsf{P}-\text{п.н.},\tau\in\mathcal{T}_n^N\}$.

Вспомогательная задача:

$$I^{(\mathsf{Q},\tau\wedge N),\gamma_1^{\tau\wedge N}}(0,S_0)\to\operatorname*{ess\,inf}_{\gamma_1^N\in\widehat{D}_1^N}\ \operatorname*{ess\,sup}_{(\mathsf{Q},\tau)\in\mathfrak{R}_N\times\mathcal{T}_0^N}\tag{1}$$

Решением задачи (1) назовем такой набор $((\mathsf{Q}^*,\tau^*),\gamma_1^{*N})$, что

$$I^{(\mathsf{Q}^*,\tau^*\wedge N),\gamma_1^{*\tau^*\wedge N}}(0,S_0)=\operatorname*{ess\,inf}_{\gamma_1^N\in\widehat{D}_1^N}\ \operatorname*{ess\,sup}_{(\mathsf{Q},\tau)\in\mathfrak{R}_N\times\mathcal{T}_0^N} I^{(\mathsf{Q},\tau\wedge N),\gamma_1^{\tau\wedge N}}(0,S_0)\quad \mathsf{P}\text{-п.н.}$$

2. Существование и свойства решения задачи (1)

Пусть $\overline{v}_n^N\triangleq\operatorname*{ess\,inf}_{\gamma_{n+1}^N\in\widehat{D}_{n+1}^N}\ \operatorname*{ess\,sup}_{(\mathsf{Q},\tau)\in\mathfrak{R}_N\times\mathcal{T}_n^N} I^{(\mathsf{Q},\tau\wedge N),\gamma_{n+1}^{\tau\wedge N}}(n,S_0^n)$.

Теорема 1. *Пусть фильтрация* $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ *— универсально полна и множество* $\mathfrak{R}_N$ *слабо относительно компактно. Тогда существует решение задачи* (1), *причем мера* $\mathsf{Q}^* \in \mathfrak{M}_N \cap (\overline{\mathfrak{R}}_N \setminus \mathfrak{R}_N)$ *— единственная дискретная, сосредоточена не более чем в* $(d+1)^N$ *точке, причем* Q^* *-п. н.*

$$\begin{cases} \overline{v}_n^N = \max\left\{e^{f_n}; \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}[\overline{v}_{n+1}^N e^{-(\gamma_{n+1}^*, \triangle S_{n+1})}|\mathcal{F}_n]\right\}, \\ \overline{v}_n^N|_{n=N} = e^{f_N}. \end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть существует решение задачи* (1) *. Тогда* Q^* *-п. н.*

$$\ln \overline{v}_0^N = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}[f_{\tau^*\wedge N}|\mathcal{F}_0] = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}_N\cap\mathfrak{M}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[f_{\tau^*\wedge N}|\mathcal{F}_0].$$

Теорема 3. *Пусть существует решение задачи* (1) *. Тогда* $\{\ln \overline{v}_n^N\}_{0\leqslant n\leqslant N}$ *удовлетворяет рекуррентному соотношению* Q^* *-п. н.*

$$\begin{cases} \ln \overline{v}_n^N = \max\left\{f_n; \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}[\ln \overline{v}_{n+1}^N|\mathcal{F}_n]\right\}, \\ \ln \overline{v}_n^N|_{n=N} = f_N. \end{cases} \tag{2}$$

З а м е ч а н и е. Рекуррентному соотношению (2)удовлетворяют $\mathcal{F}_n$ -измеримые случайные величины $\operatorname{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_0^N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}[f_{\tau\wedge N}|\mathcal{F}_n]$, $0 \leqslant n \leqslant N$, которые являются решением задачи об оптимальной остановке относительно меры Q^* [3].

3. Расчет американского опциона на неполном $\{1, \overline{S}\}$ -рынке с конечным горизонтом.

Минимаксным решением задачи расчета американского опциона на неполном рынке с конечным горизонтом назовем тройку $((\mathsf{Q}^*, \tau^*), \pi^*) \in (\overline{\mathfrak{R}}_N \times \mathcal{T}_0^N, SF)$, такую что $\mathsf{Q}^*(f_{\tau^*\wedge N} = X_{\tau^*\wedge N}^{\{\pi^*\}}) = 1$.

Теорема 4. *Пусть существует решение задачи* (1) *. Тогда существует минимаксное решение задачи расчета американского опциона на неполном рынке с конечным горизонтом* $((\mathsf{Q}^*, \tau^*), \pi^*)$, *где* $((\mathsf{Q}^*, \tau^*), \gamma_1^{*N})$ *— решение задачи* (1), π^* *— минимальный совершенный хеджирующий портфель. При этом для любого* $n \in \{0, \ldots, \tau^* \wedge N\}$ *относительно меры* Q^* *капитал портфеля* π^* *допускает представление* $X_n^{\{\pi^*\}} = \ln \overline{v}_n^N$ *и* $X_{\tau^*\wedge N}^{\{\pi^*\}} = f_{\tau^*\wedge N}$.

Утверждения теорем 2, 3 и 4 устанавливают связь между задачей расчета американского опциона на неполном рынке с конечным горизонтом относительно меры Q^* и задачей об оптимальной остановке.

В докладе также представлено несколько численных примеров решения задачи об оптимальной остановке различных ограниченных функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики (теория). Том 2. Теория. М.: Фазис, 1998.
2. *Фельмер Г.*, *Шид А.* Введение в стохастические финансы. Дискретное время. М.: МЦНМО, 2008.
3. *Ширяев А. Н.* Статистический последовательный анализ. М.: Наука, 1976.