ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 20 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2
2013

А. В Иванов (Москва, МИЭМ НИУ ВШЭ). **Асимптотически оптимальные критерии в задаче различения гипотез о распределении случайного вектора.**

Рассматривается последовательность независимых случайных векторов $\overline{X}_t = (X_{t1}, X_{t2}, \ldots, X_{tm}) \in B^m$, $B = \{0,1\}$, $m = 1,2,\ldots,$ $t = 1,2,\ldots,n$, с независимыми координатами с распределением $\mathbf{P}\{X_{tj} = \tau\} = 1/2$, $\tau \in B$, $j = 1,2,\ldots,m$, $t = 1,2,\ldots,n$.

Введем в рассмотрение последовательность независимых случайных векторов $\overline{\epsilon}_t = (\epsilon_{t1}, \epsilon_{t2}, \ldots, \epsilon_{tm}) \in B^m$, $t = 1,2,\ldots,n$, с независимыми координатами, не зависящими от последовательности $\{\overline{X}_t\}_{t=1}^n$, $\mathbf{P}\{\epsilon_{tj} = \tau\} = (1 + (-1)^\tau \delta)/2$, $\tau \in B$, $j = 1,2,\ldots,m$, $t = 1,2,\ldots,n$, $\|\delta\| \leqslant 1$.

Рассмотрим последовательность случайных величин $\eta_t^* = f(\overline{X}_t \oplus \overline{\epsilon}_t) + \xi_t^*$, где ξ_t^* $(t = 1,2,\ldots,n)$ — независимые случайные величины с распределением $\mathbf{N}(m, \sigma^2)$, не зависящие от векторов $\{\overline{X}_t\}_{t=1}^n$, $\{\overline{\epsilon}_t\}_{t=1}^n$, $\oplus$ — покоординатное сложение векторов по модулю 2, $f(\overline{x})\colon B^m \to \mathbf{R}$, $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B^m$ — заданная псевдобулева функция.

Рассмотрим новую последовательность случайных величин $\eta_t = (\eta_t^* - m)/\sigma = \lambda f(\overline{X}_t \oplus \overline{\epsilon}_t) + \xi_t$, где ξ_t $(t = 1,2,\ldots,n)$ — независимые случайные величины с распределением $\mathbf{N}(0,1)$, $\lambda = \sigma^{-1}$.

Обозначим $\varphi(z) = (2\pi)^{-1/2} e^{-z^2/2}$ — плотность, $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(u)\, du$ — функцию распределения, $\zeta_p = \Phi^{-1}(p)$ — квантиль распределения $\mathbf{N}(0,1)$ уровня p.

Предположим, что наблюдается последовательность независимых случайных векторов вида $(\eta_t, \overline{X}_t) = (\lambda f(\overline{X}_t \oplus \overline{\epsilon}_t) + \xi_t, \overline{X}_t)$, $t = 1,2,\ldots,n$. Обозначим $p_{f,\lambda,\delta}(z, \overline{x})$ плотность распределения вероятностей случайного вектора $(\eta_t, \overline{X}_t)$ при заданной функции f и фиксированных значениях λ, δ. Для любых измеримых множеств $A \subset \mathbf{R}$, $C \subset B^m$ имеет место равенство $\mathbf{P}\{\eta_t \in A, \overline{X}_t \in C\} = \sum_{\overline{x} \in C} \int_A p_{f,\lambda,\delta}(z, \overline{x})\, dz$.

Введем в рассмотрение гипотезы $H_{f,\lambda,\delta}$. Каждая гипотеза однозначно задается функцией f и параметрами λ, δ. Дополнительно введем вспомогательную гипотезу $H^0\colon \lambda = 0$, при которой $\eta_t = \xi_t$.

В работе, представленной данным докладом, построены локально асимптотически оптимальные критерии (локальная асимптотическая оптимальность критерия определена, например, в [6, с. 105]) различения гипотез $H_{f,\lambda,\delta}$ и H_{f^*,λ,δ^*} по выборке $\{(\eta_t, \overline{X}_t)\}_{t=1}^n$ в условиях схемы серий при $n \to \infty$, $\lambda = \lambda(n) \to 0$, а также найдены их вероятностные характеристики, в частности, асимптотически минимальный объем выборки для заданных вероятностях ошибок первого и второго рода. Далее будем обозначать рассматриваемые гипотезы $H_{f,\delta}$ и H_{f^*,δ^*}, а соответствующие им плотности — $p_{f,\delta}$, p_{f^*,δ^*}.

Заметим, что при $f(\overline{x}) = \|\overline{x}\| = \sum_{j=1}^m x_j$ рассматриваемая последовательность представляет собой модель двоичного симметричного канала (ДСК), а случайная величина $\lambda\|\overline{X}_t \oplus \overline{\epsilon}_t\| + \xi_t$ — модель канала с аддитивным белым гауссовским шумом

(АБГШ) (подробнее о терминологии см., например, [1, с. 85]). Отметим также, что близкие по постановкам и методам решения задачи для случая $\mathbf{P}\{\overline{X}_t = \overline{X}\} = 1$, $t = 1, 2, \ldots, n$, неоднократно рассматривались в литературе (см., например, [2, 4, 5]).

В области $\prod_{t=1}^{n} p_{f,\delta}(\eta_t, \overline{X}_t) p_{f^*,\delta^*}(\eta_t, \overline{X}_t) > 0$ статистика отношения правдоподобия оптимального критерия различения гипотез $H_{f,\delta}$ и H_{f^*,δ^*} имеет вид

$$L_{f,f^*,\delta,\delta^*} = \ln\left(\prod_{t=1}^{n} \frac{p_{f^*,\delta^*}(\eta_t, \overline{X}_t)}{p_{f,\delta}(\eta_t, \overline{X}_t)}\right) = \sum_{t=1}^{n} \ln\left(\frac{p_{f^*,\delta^*}(\eta_t, \overline{X}_t)}{p^0(\eta_t, \overline{X}_t)}\right) - \sum_{t=1}^{n} \ln\left(\frac{p_{f,\delta}(\eta_t, \overline{X}_t)}{p^0(\eta_t, \overline{X}_t)}\right),$$

где $p^0(\eta_t, \overline{X}_t)$ — соответствующая плотность распределения при справедливости гипотезы H^0.

Далее $\mathfrak{L}_{f,\delta}(L_{f,f^*,\delta,\delta^*})$ будем обозначать распределение статистики $L_{f,f^*,\delta,\delta^*}$ при справедливости гипотезы $H_{f,\delta}$. Для упрощения обозначений везде при гипотезе или при соответствующих статистиках и распределениях будем указывать только те параметры, которые различны. Например, вместо $\mathfrak{L}_{f,\delta}(L_{f,f^*,\delta,\delta})$ будем писать $\mathfrak{L}_f(L_{f,f^*})$. Символом $\Rightarrow$ далее будем обозначать слабую сходимость вероятностных мер. Будем считать, что заданы вероятности ошибок критерия первого и второго рода $\alpha < 1/2$, $\beta < 1/2$.

Теорема 1. *Пусть* $n \to \infty$, $\lambda = \lambda(n) \to 0$, $n\lambda^2 = \gamma = \text{const} > 0$, $\delta = \text{const}$, $\delta^* = \text{const}$, $h_{f,f^*,\delta,\delta^*} = E_0(a(f^*, \delta^*, \overline{X}_t) - a(f, \delta, \overline{X}_t))^2 > 0$, *где* $a(f, \delta, \overline{X}) = E_\delta f(\overline{X} \oplus \overline{\epsilon})$ *и либо* $f(\overline{x}) \neq f^*(\overline{x})$, *либо* $\delta \neq \delta^*$. *Тогда* $\mathfrak{L}_{f,\delta}(L_{f,f^*,\delta,\delta^*}) \Rightarrow \mathbf{N}(-\gamma h_{f,f^*,\delta,\delta^*}/2; \gamma h_{f,f^*,\delta,\delta^*})$ *при гипотезе* $H_{f,\delta}$; $\mathfrak{L}_{f^*,\delta^*}(L_{f,f^*,\delta,\delta^*}) \Rightarrow \mathbf{N}(\gamma h_{f,f^*,\delta,\delta^*}/2; \gamma h_{f,f^*,\delta,\delta^*})$ *при гипотезе* H_{f^*,δ^*}. *Минимальный объем материала для различения указанных гипотез асимптотически равен* $n_{f,f^*,\delta,\delta^*} \sim (\zeta_\alpha + \zeta_\beta)^2 (\lambda^2 h_{f,f^*,\delta,\delta^*})^{-1}$.

Нетрудно видеть, что теорема 1 достаточно универсальна в том смысле, что дает общий вид асимптотических распределений при различных конкретизациях параметров модели f, λ, δ. В частности, при $f(\overline{x}) = f^*(\overline{x})$ из нее вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $n \to \infty$, $\lambda = \lambda(n) \to 0$, $n\lambda^2 = \gamma = \text{const} > 0$, $\delta = \text{const}$, $\delta^* = \text{const}$, $\delta \neq \delta^*$, $h_{\delta,\delta^*} = E_0(a(f, \delta^*, \overline{X}_t) - a(f, \delta, \overline{X}_t))^2 > 0$, *где* $a(f, \delta, \overline{X})$ *определено в формулировке теоремы* 1. *Тогда* $\mathfrak{L}_\delta(L_{\delta,\delta^*}) \Rightarrow \mathbf{N}(-\gamma h_{\delta,\delta^*}/2; \gamma h_{\delta,\delta^*})$ *при гипотезе* H_δ; $\mathfrak{L}_{\delta^*}(L_{\delta,\delta^*}) \Rightarrow \mathbf{N}(\gamma h_{\delta,\delta^*}/2; \gamma h_{\delta,\delta^*})$ *при гипотезе* H_{δ^*}. *Минимальный объем материала для различения указанных гипотез асимптотически равен* $n_{\delta,\delta^*} \sim (\zeta_\alpha + \zeta_\beta)^2 (\lambda^2 h_{\delta,\delta^*})^{-1}$.

В качестве частного случая следствия при $f(\overline{x}) = \|\overline{x}\| = \sum_{j=1}^{m} x_j$, $\delta = 0$, $\delta^* = 1$ получаем следующее утверждение (см. [3, теорема 1]).

Следствие. *Пусть* $n \to \infty$, $\lambda = \lambda(n) \to 0$, $n\lambda^2 = \gamma = \text{const} > 0$. *Тогда* $\mathfrak{L}_0(L_{0,1}) \Rightarrow \mathbf{N}(-m\gamma/8; m\gamma/4)$ *при гипотезе* H_0; $\mathfrak{L}_1(L_{0,1}) \Rightarrow \mathbf{N}(m\gamma/8; m\gamma/4)$ *при гипотезе* H_1. *Минимальный объем материала для различения указанных гипотез асимптотически равен* $n_{0,1} \sim 4(\zeta_\alpha + \zeta_\beta)^2 m^{-1} \lambda^{-2}$.

При доказательстве приведенных утверждений существенно использовались результаты работ [6, 7].

В качестве дальнейших направлений исследований можно рассмотреть общую схему серий, в которой при $n \to \infty$ изменяются f, λ, δ, а вместо операции $\oplus$ используются другие операции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вернер М.* Основы кодирования (серия «Мир программирования»). М.: Техносфера, 2004, 288 с.
2. *Иванов А. В.* Оптимальный критерий различения n нормальных гипотез. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2001, т. 8, в. 2, с. 762–763.

3. *Иванов А. В.* Асимптотически наиболее мощный критерий различения гипотез о распределении случайного вектора. — Десятая общероссийская научная конференция «Математика и безопасность информационных технологий (МаБИТ-2011)». Материалы секции «Математические проблемы информационной безопасности». М.: МАКС-ПРЕСС, 2012, с. 93–97.
4. *Пазизин С. В.* Обнаружение и прием последовательности сигналов, искаженных случайной помехой и независимым шумом. — Проблемы передачи информации, 1998, т. 34, № 1, с. 46–55.
5. *Пазизин С. В.* Вероятности правильного декодирования для канала с аддитивным нормальным шумом и двоичного симметричного канала при случайном выборе кодовых слов. — Дискретн. матем., 2000, т. 12, в. 2, с. 93–98.
6. *Русас Дж.* Контигуальность вероятностных мер. М.: Мир, 1975, 256 с.
7. *Чибисов Д. М.* Теорема о допустимых критериях и ее применение к одной асимптотической задаче проверки гипотез. — Теория вероятн. и ее примен., 1967, т. XXI, в. 1, с. 96–111.