ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 20 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2
2013

Р. Ф. Салимов (Казань, КПФУ). **Асимптотически оптимальные процедуры при различении двусторонних гипотез.**

В эксперименте наблюдается выборка $X^{(n)} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, плотность распределения которой $f(x|\theta)$ зависит от неизвестного параметра $\theta \in \mathbf{R}^1$. Требуется построить критерий различения двух сложных гипотез $H_0: \theta \in \Theta_0 = [\theta_0, \theta_1]$ и $H_1: \theta \notin \Theta_0$, когда параметр θ есть реализация случайной величины ϑ с известной плотностью $g(\theta)$ относительно меры Лебега. Рассматривается случай малых ограничений (при $\beta_0, \beta_1 \to 0$), накладываемых на d-апостериорные вероятности ошибок первого и второго рода решающей функции $\delta_n = \delta_n(x^{(n)})$: $\mathcal{R}_k(\delta_n) = \mathbf{P}\{\vartheta \notin \Theta_k \mid \delta = d_k\} \leqslant \beta_k$, $k = 0, 1$, где d_k — решение в пользу гипотезы H_k. Минимальный объем выборки n^*, при котором существует такая решающая функция, называется *необходимым объемом выборки* (НОВ).

Асимптотическое поведение НОВ ($\beta_k \to 0$) связано с поведением функции вклада

$$\Delta_n(\theta) = \frac{1}{\sqrt{n\, I(\theta)}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\theta} \log\, f(x|\theta)$$

в крайних точках интервала. Если вероятностная модель удовлетворяет стандартным условиям регулярности и функция плотности $g(\theta)$ в точках θ_0 и θ_1 непрерывна и положительна (в дальнейшем условие R), что обеспечивает асимптотическую нормальность апостериорного распределения (см. [1]), то относительно асимптотики НОВ имеет место следующее утверждение, полученное автором совместно с С. В. Симушкиным.

Пусть $Q(c) = \varphi(\Phi^{-1}(c)) + c\,\Phi^{-1}(c)$, $0 < c < 1$, $\rho = \rho(\theta_0, \theta_1) = (g(\theta_0)\, I(\theta_0)^{-1/2} + g(\theta_1)\, I(\theta_1)^{-1/2})$, а c_0 — решение уравнения

$$\frac{Q(c_0)}{Q(1-c_0)} = \left(\frac{1}{G(\theta_1) - G(\theta_0)} - 1\right) K.$$

Теорема 1. *Если* $\beta_0, \beta_1 \to 0$ *так, что* $\beta_1/\beta_0 \to K$, $0 < K < \infty$, *и вероятностная модель удовлетворяет условиям* R, *то* НОВ

$$n^* \asymp \left(\frac{\rho\, Q(1-c_0)}{G(\theta_1) - G(\theta_0)}\right)^2 \frac{1}{\beta_0^2}.$$

В данном сообщении предлагается способ построения асимптотически оптимальных по объему выборки статистических процедур, основанный на асимптотической нормальности оценок параметра θ. В условиях регулярности зачастую можно построить оценку $\widehat{\theta}_n$, которая допускает стохастическое представление вида $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) = \Delta_n + o(1)$, где $o(1) \to 0$ по вероятности P_θ. Рассмотрим решающее правило δ_n^*, принимающее гипотезу H_0, если $|\widehat{\theta}_n - (\theta_0 + \theta_1)/2| < c$. Минимальный объем выборки n, при котором найдется константа c, для которой вероятности ошибок $R_k(\delta_k^*) \leqslant \beta_k$, $k = 0, 1$, обозначим $\widehat{n}$.

Теорема 2. *Пусть* $\beta_0, \beta_1 \to 0$ *так, что* $0 < \underline{\lim}\, \beta_0/\beta_1 \leqslant \overline{\lim}\, \beta_0/\beta_1 < \infty$, *если выполнены условия* R *из теоремы* 1, *тогда* $\widehat{n} \sim n^*$.

Нахождение критической константы сопряжено с определенными вычислительными трудностями, однако в предположении, что статистика $\widehat{\theta}_n$ распределена нормально с параметрами θ и $1/\sqrt{n\,I(\theta)}$, эта задача значительно облегчается.

Теорема 3. *Пусть объем выборки* n^* *определяется по формуле теоремы* 1, *а константа* c *находится как решение уравнения* $R_0(\delta_n^*) = \beta_0$, *где вероятность ошибки первого рода вычисляется относительно нормального* $(\theta,\ 1/\sqrt{nI(\theta)})$ *распределения наблюдений, тогда решающая функция* δ_n^* *будет асимптотически* d-*гарантийна*:

$$\lim_n \frac{R_k(\delta_n^*)}{\beta_k} = 1, \quad k = 0, 1.$$

Точность аппроксимации была проанализирована на ряде конкретных вероятностных моделей (экспоненциальная-гамма, коши-коши). Во всех случаях расхождение не превысило 10%.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *van der Vaart A. W.* Asymptotic Statistics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000.