ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 20 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2
2013

С. В. Симушкин (Казань, КПФУ). **Асимптотические Б-доверительные верхние границы.**

Пусть $X^{(n)} = (X_1, \ldots, X_n)$ — выборка из распределения P_θ, индексированного параметром $\theta \in \mathbf{R}^1$. Параметр θ в каждом эксперименте есть реализация случайной величины ϑ с функцией распределения $G(\theta)$. Статистика $\overline{\theta} = \overline{\theta}(x^{(n)})$ образует верхнюю $(1-\alpha)$-доверительную границу, если условная вероятность $\mathbf{P}\{\vartheta \leqslant \theta \mid \overline{\theta}(X^{(n)}) \leqslant \theta\} \geqslant 1-\alpha$ при любых θ с $G(\theta) > 0$. В работе [1] такие границы названы Б-доверительными (доверительными по С. Н. Бернштейна).

В некоторых ситуациях оптимальная граница, минимизирующая условную вероятность $\mathbf{P}\{\vartheta \leqslant \theta \mid \overline{\theta}(X^{(n)}) > \theta\}$, может быть построена следующим образом (см. [1]). Пусть $\mathcal{T}_n(z; X^{(n)}) = \mathbf{P}\{\vartheta \leqslant z \mid X^{(n)}\}$ — апостериорное распределение ϑ при фиксированном $X^{(n)}$. Положим

$$\widehat{\theta}_n(x^{(n)}) = \inf\langle\, z : \mathbf{P}\{\vartheta \leqslant z \mid \mathcal{T}_n(z\,;\, X^{(n)}) \geqslant \mathcal{T}_n(z; x^{(n)})\} \geqslant 1-\alpha \rangle.$$

Если вероятностная моделей обладает монотонным (относительно статистики $T = T(X^{(n)})$) отношением правдоподобия, то статистику $\mathcal{T}_n$ можно заменить на T и в этом случае граница $\widehat{\theta}_n$ будет оптимальной.

В общем случае для границы $\widehat{\theta}_n$ условие доверительности может нарушаться. Пусть $F_n(t; \theta, z) = P_\theta\{\mathcal{T}_n(z; X^{(n)}) < t\}$ — распределение $\mathcal{T}_n$ при фиксированных θ, z; $\chi(A)$ — индикаторная функция события A.

Теорема 1. *Если функция распределения G имеет обратную G^{-1} и для любых $z \neq y \neq \theta \in \mathbf{R}^1$ при $n \to \infty$ по вероятности P_θ последовательность $F_n(\mathcal{T}_n(z\,;\, X^{(n)})\,;\, z, y) \xrightarrow{P_\theta} \chi(\theta < y)$, то для любых θ с $G(\theta) > 0$*

(I) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\vartheta \leqslant \theta \mid \widehat{\theta}_n \leqslant \theta\} \geqslant 1-\alpha$;

(II) $\widehat{\theta}_n \xrightarrow{P_\theta} G^{-1}((1-\alpha)G(\theta))$.

Условие теоремы представляет собой слегка усиленный вариант условия состоятельности апостериорного распределения $\mathcal{T}_n$.

В [1] был предложен простой вариант асимптотически доверительной границы $G^{-1}((1-\alpha)G(T_n))$, где T_n — любая состоятельная оценка θ. Пусть T_n — равномерно состоятельная оценка θ такая, что апостериорное распределение $\mathcal{T}_n$ асимптотически нормально (см., например, [2]) со средним T_n и дисперсией $(nI(\theta))^{-1}$: при любом θ

$$\sup_z \left| \mathcal{T}_n\Big(\theta + \frac{z}{\sqrt{nI(\theta)}}; X^{(n)}\Big) - \Phi(z - T_n) \right| \xrightarrow{P_\theta} 0, \quad n \to \infty,$$

где Φ — функция распределения стандартного нормального (0,1) закона.

Пусть $\phi(x) = \Phi'(x)$, $g(\theta)$ — плотность распределения ϑ. Определим

$$\theta_n^* = T_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\, c_n(T_n, \alpha),$$

где $c_n(x,\alpha)$ — решение уравнения $\phi(c) - c\Phi(-c) = G(x)\alpha\sqrt{nI(x)}/g(x)$.

Теорема 2. *Если статистический эксперимент удовлетворяет условиям, обеспечивающим локальную асимптотическую нормальность, априорная плотность* $g(\theta)$ *всюду непрерывна и положительна, тогда асимптотическая надежность границы* θ_n^* *равна* $1-\alpha/\sqrt{n}$:

$$\sqrt{n}(1 - \mathbf{P}\{\vartheta \leqslant \theta \mid \theta_n^* \leqslant \theta\}) = \alpha.$$

Числовые примеры показывают, что при больших значениях T_n предложенная граница сильно отличается от оптимальной. В качестве варианта исправления такой ситуации предлагается использовать границу

$$\theta_n^* = \max\{T_n + c_n/\sqrt{n},\ G^{-1}((1-\alpha)G(T_n))\},$$

каковая уже при объеме выборки порядка $n=50$ и уровне надежности $1-\alpha/\sqrt{n} = 0,95$ практически неотличима от оптимальной и превосходит по точности границу $G^{-1}((1-\alpha)G(T_n))$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Володин И. Н.*, *Симушкин С. В.* Доверительное оценивание в d-апостериорном подходе. — Теория вероятн. и ее применен., 1990, т. 35, в. 2, с. 318–329.
2. *van der Vaart A. W.* Asymptotic Statistics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000.