О Б О З Р Е Н И Е
П Р И К Л А Д Н О Й И П Р О М Ы Ш Л Е Н Н О Й
Т о м 20 М А Т Е М А Т И К И В ы п у с к 2
2013

Э. Ф. Х а й р е т д и н о в (Москва, НИИМех МГУ). **Ламинарный пограничный слой на неподвижной сфере, обтекаемой стационарным однородным потоком вязкой несжимаемой жидкости.**

Примем радиус сферы и скорость потока на бесконечности равными 1. Названный поток описывается уравнениями [1, с. 92–93]

$$\frac{\partial\, ur\sin\theta}{\partial\,\theta}+\frac{\partial\, vr^2\sin\theta}{\partial\, r}=0, \tag{1.1}$$

$$\frac{u}{r}\frac{\partial\, u}{\partial\theta}+v\frac{\partial\, u}{\partial\, r}+\frac{uv}{r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\nu\left(\Delta u-\frac{u}{r^2\sin^2\theta}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\theta}\right), \tag{1.2}$$

$$\frac{u}{r}\frac{\partial\, v}{\partial\theta}+v\frac{\partial\, v}{\partial\, r}-\frac{u^2}{r}=-\frac{\partial p}{\partial\, r}+\nu\left(\Delta v-2\frac{v}{r^2}-2\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}u-\frac{2}{r^2}\frac{\partial\, u}{\partial\theta}\right), \tag{1.3}$$

Здесь Δ — дифференциальный оператор:

$$\Delta=\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\partial^2}{\partial\, r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial\, r},$$

$r,\, \theta,\, \varphi$ — сферические координаты с полюсом в центре сферы, $u=v_\theta,\, v=v_r,\, v_\varphi=0$ — компоненты вектора скорости течения жидкости, p — приведенное давление, $\partial\, p/\partial\varphi=0$, $\nu\ll 1$ — кинематическая вязкость.

Решение системы уравнений (1) определяется граничными условиями

$$r=\infty\colon\quad u=\sin\theta,\quad v=-\cos\theta, \tag{2.1}$$

$$r=1\colon\quad u=v=0. \tag{2.2}$$

Уравнения (1) имеют потенциальное решение [2, с. 586–587]: $\widetilde{u}=\Phi_\theta/r=(1+2^{-1}r^{-2})\sin\theta$, $\widetilde{v}=-(1-r^{-2})\cos\theta$, которое удовлетворяет граничным условиям (2.1), но граничным условиям (2.2) удовлетворяет лишь частично: при $r=1$ выполняется $\widetilde{v}=0$, но $\widetilde{u}=(3/2)\sin\theta$. При этом давление в потоке определяется формулой Лагранжа $\widetilde{p}(\theta,r)=p_\infty+(1-\widetilde{u}^2-\widetilde{v}^2)/2$. На сфере $p=\widetilde{p}(\theta,1)=p_\infty+1/2-(9/8)\sin^2\theta$.

R. v. Mises [3, с. 434] нашел, что при малых значениях ν решение уравнений (1), удовлетворяющее граничным условиям (2.2), можно искать в виде ряда $u=u_0(x,y)+\varepsilon u_1(x,y)+\cdots$, $v=\varepsilon v_1(x,y)+\cdots$, $p=p_0(x)+\varepsilon p_1(x,y)$ (где $x=\theta$, $y=(r-1)/\varepsilon$, $\varepsilon=\nu^{1/2}$) . Решение в первом приближении определяется уравнениями

$$r=1,\quad (u_0\sin x)_x+(v_1\sin x)_y=0,\quad u_0u_{0x}+v_1u_{0y}=-p_0'(x)+u_{0yy}, \tag{3}$$

которые определяют течение в бесконечно тонком слое $1\leqslant r<1+\varepsilon\delta(x)$, прилегающем к обтекаемой сфере. В этом слое параметры u_0 и v_1 являются функциями переменных x и y , а параметр p_0 — функция только одной переменной x . Если допустить, что вне этого слоя ($y\geqslant\delta(x)$) течение жидкости — потенциальное, то можно принять, что $p_0(x) = \widetilde{p}(x,1)$, т. е. считать, что $p_0(x)$ — распределение давления на сфере при ее потенциальном обтекании. Тогда при $y = \delta(x)$ имеем $u = \widetilde{u}_0(x, \delta(x)) = (3/2)\sin x$. Поскольку при изменении y координата r изменяется в бесконечно малом диапазоне, это условие можно записать в виде

$$y = \infty: \quad u = u_0(x, \delta(x)) = (3/2)\,\sin x. \tag{3.1}$$

Если сюда добавить граничные условия

$$y = 0: \quad u_0 = v_1 = 0, \tag{3.2}$$

то уравнения (3) вполне совпадут с уравнениями Прандтля [4] при обтекании сферы, которые представляются в виде

$$(u \sin x)_x + (v \sin x)_y = 0, \quad u u_x + v u_y = -(9/4)\,\sin x \cos x + u_{yy}, \tag{4}$$

$$y = \infty: \quad u = (3/2)\,\sin x, \qquad y = 0: \quad u = v = 0. \tag{4.1}$$

Уравнения (3) сводятся к уравнениям (здесь $V(x) = (3/2)\,\sin x$)

$$\begin{gathered} u = V(x) F_y(x,y), \quad v = -\frac{1}{V(x)} V^2(x) F(x,y)_x = -2V'(x)F - V(x)F'_x, \\ F_{yyy} = \frac{3}{2}\cos x (F_y^2 - 1 - 2FF_{yy}) + \frac{3}{2}\sin x (F_y F_{xy} - F_x F_{yy}), \end{gathered} \tag{5}$$

$$y = 0: \quad F = F_y = 0, \qquad y = \infty: \quad F_y = 1. \tag{5.1}$$

Замена переменных $\overline{F} = \beta F$, $\overline{y} = \beta y$ $(\beta = (2/3)^{1/2})$ приводит уравнения (5) к виду (черта над новыми переменными отпускается)

$$F_{yyy} = \cos x (F_y^2 - 1 - 2FF_{yy}) + \sin x (F_y F_{xy} - F_x F_{yy}), \tag{6}$$

$$y = 0: \quad F = F_y = 0, \qquad y = \infty: \quad F_y = 1. \tag{6.1}$$

Произведя замену $\xi = \sin(x/2)$, получим уравнение

$$F_{yyy} = (1 - 2\xi^2)(F_y^2 - 1 - 2FF_{yy}) + (1 - \xi^2)(F_y F_{\xi y} - F_\xi F_{yy}). \tag{7}$$

При изменении x в промежутке $0 \leqslant x < \pi$ переменная ξ изменяется в промежутке $0 \leqslant x < 1$ $(x = x_1 = \pi/2$, $\xi = \xi_1 = 2^{-1/2})$.

Аналитическое решение уравнения (7) представляется рядом

$$F(\xi, y) = \xi^\alpha f_\alpha(y) \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Здесь функция $f_0(y)$ определяется уравнением $f_0''' = (f_0')^2 - 1 - 2f_0 f_0''$ и краевыми условиями $f_0(0) = f_0'(0) = 0$, $f_0'(\infty) = 1$. Решение этой краевой задачи известно: $f_0''(0) \approx 1{,}3120$, его впервые получил F. Homann [5, с. 83].

При $i > 0$ функции $f_i(\eta)$ удовлетворяют линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям вида

$$f_i'''(\eta) = A_i f_0' f_i' + B_i f_0 f_i'' + D_i f_0'' f_i + \Phi_i(f_0, f_0', \ldots, f_{i-1}', f_{i-1}'') \tag{9.1}$$

и однородным краевым условиям

$$f_i(0) = f_i'(0) = f_i'(\infty) = 0. \tag{9.2}$$

Если сходимость ряда (8) в области $\xi > \xi_1$ окажется неудовлетворительной или не будет желания решать большое количество краевых задач (9) для определения функций $f_i(\eta)$, то можно свести задачу к расчету асимптотического решения уравнений (3) достаточно высокого уровня [6, 7].

Работа выполнена под руководством акад. С. С. Григоряна и поддержана РФФИ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Слезкин Н. А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: ГИТТЛ, 1955, 520 с.
2. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: ГИТТЛ, 1957, 784 с.
3. *Кочин Н. Е.*, *Кибель И. А.*, *Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М.–Л.: ГИТТЛ, 1948, 612 с.
4. *Prandtl L.* Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verhandig. D. III. Intern. Math. Kongr., Heidelberg, 1904.
5. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: ИЛ, 1956, 528 с.
6. *Хайретдинов Э. Ф.* Асимптотические решения уравнений пограничного слоя. II. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2012, т. 19, в. 4, с.600–601.
7. *Хайретдинов Э. Ф.* К задаче о течении несжимаемой жидкости в пограничном слое на крыловом профиле. Отчет № 5172. М.: НИИ механики МГУ, 2012, 46 с.