ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 20 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2
2013

Д. В. Иванов (Самара, СамГУПС). **Идентификация динамических систем дробного порядка с помехами во входных и выходных сигналах.**

В настоящее время наблюдается активное развитие состоятельных методов идентификации линейных динамических систем с помехами во входных и выходных сигналах [1–3]. В докладе предложено обобщение подхода, используемого в [2, 3], на случай динамических систем дробного порядка.

Рассмотрим линейную динамическую систему дробного порядка, описываемую следующими стохастическими уравнениями с дискретным временем $i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$:

$$z_i = \sum_{m=1}^{r} b_0^{(m)} \Delta^{\alpha_m} z_{i-1} + \sum_{m=1}^{r_1} a_0^{(m)} \Delta^{\beta_m} x_i, \quad y_i = z_i + \xi_i^{(1)}, \quad w_i = x_i + \xi_i^{(2)}, \tag{1}$$

где $\Delta^{\alpha_m} z_i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{\alpha_m}{j} z_{i-j}$, $\Delta^{\beta_m} x_i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{\beta_m}{j} x_{i-j}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_r$, $0 < \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_{r_1}$, $\binom{\alpha}{j} = \Gamma(\alpha+1)/(\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha-j+1))$, $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\, dt$.

Предположим, что выполняются следующие условия.

1. Множество $\widetilde{\mathrm{B}}$, которому априорно принадлежат истинные значения параметров устойчивой динамической системы, является компактом.

2. Случайные процессы $\{\xi_i^{(1)}\}, \{\xi_i^{(2)}\}$ являются мартингал-разностями и удовлетворяют следующим условиям: $\mathbf{E}\,(\xi_{i+1}^{(k)} \,|\, F_i^{(k)}) = 0$ п. н., $\mathbf{E}\,((\xi_{i+1}^{(k)})^2 \,|\, F_i^{(k)}) < \infty$ п. н., $\mathbf{E}\,(\xi_i^{(k)})^4 < \infty$, $\mathbf{E}\,(\xi_i^{(k)})^2 < \infty$, $k = 1, 2$, где $F_i^{(k)}$ — σ-алгебры, индуцированные семействами непрерывных случайных величин $\{\xi^{(k)}(t),\ t \in T_i\}$, $T_i = \{t\colon\ t \leqslant i,\ t \in \mathbf{Z}_c\}$, $\mathbf{Z}_c$ — множество целых чисел.

3. Входной сигнал x_i является случайным процессом с $\mathbf{E}\, x_i = 0$, $\mathbf{E}\, x_i^2 = \sigma_x^2 < \infty$ и удовлетворяет условию постоянного возбуждения порядка r_1, т. е. с вероятностью 1 существует $\lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{i=1}^{N} X_i X_i^T = H_{xx}^*$, где $X_i = (x_i, x_{i-1}, \ldots, x_{i-r_1})^T$ и матрица H_{xx}^* положительно определена.

4. Процесс $\{x_i\}$ статистически не зависит от $\{\xi_i^{(1)}\}$, $\{\xi_i^{(2)}\}$.

Требуется определить оценки коэффициентов динамической системы, описываемой уравнением (1), по наблюдаемым последовательностям y_i, w_i при известных порядках r, r_1.

Определим оценку $\widehat{\theta}(N)$ неизвестных параметров θ из условия минимума критерия

$$\min_{\theta \in \widetilde{\mathrm{B}}} \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - \varphi_i^T \theta)^2}{\overline{\sigma}_1^2 + b_0^T H_{\xi_1} b_0 + a_0^T H_{\xi_2} a_0}, \tag{2}$$

где $\overline{\sigma}_1^2 = \lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{i=0}^{N} (\xi_i^{(1)})^2$, $\theta = (b_0^T \,|\, a_0^T)^T = (b_0^{(1)}, \ldots, b_0^{(r)} \,|\, a_0^{(1)}, \ldots, a_0^{(r_1)})^T$,

$\varphi_i = ((\varphi_y^{(i)})^T \mid (\varphi_w^{(i)})^T)^T$,

$$\begin{aligned}
\varphi_y^{(i)} &= \left(\sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{\alpha_1}{j} y_{i-j-1}, \ldots, \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{\alpha_r}{j} y_{i-j-1} \right)^T, \\
\varphi_{\xi_1}^{(i)} &= \left(\sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{\alpha_1}{j} \xi_{i-j-1}^{(1)}, \ldots, \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{\alpha_r}{j} \xi_{i-j-1}^{(1)} \right)^T, \\
\varphi_w^{(i)} &= \left(\sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{\beta_1}{j} w_{i-j}, \ldots, \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{\beta_{r_1}}{j} w_{i-j} \right)^T, \\
\varphi_{\xi_2}^{(i)} &= \left(\sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{\beta_1}{j} \xi_{i-j}^{(2)}, \ldots, \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{\beta_{r_1}}{j} \xi_{i-j}^{(2)} \right)^T, \\
H_{\xi_1} &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{N} \varphi_{\xi_1}^{(i)} (\varphi_{\xi_1}^{(i)})^T \right] = \begin{pmatrix} h_{\xi_1}^{(11)} & \ldots & h_{\xi_1}^{(r1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{\xi_1}^{(1r)} & \ldots & h_{\xi_1}^{(rr)} \end{pmatrix}, \\
h_{\xi_1}^{(mk)} &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{i} \binom{\alpha_m}{j} \binom{\alpha_k}{j} \sigma_1^2 (i-j-1), \\
H_{\xi_2} &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{N} \varphi_{\xi_2}^{(i)} (\varphi_{\xi_2}^{(i)})^T \right] = \begin{pmatrix} h_{\xi_2}^{(11)} & \ldots & h_{\xi_2}^{(r_1 1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{\xi_2}^{(1r_1)} & \ldots & h_{\xi_2}^{(r_1 r_1)} \end{pmatrix}, \\
h_{\xi_2}^{(mk)} &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{i} \binom{\beta_m}{j} \binom{\beta_k}{j} \sigma_2^2 (i-j).
\end{aligned}$$

Теорема. *Пусть некоторый случайный процесс* $\{y_i, \ \ i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$ *описывается уравнением* (1) *с начальными нулевыми условиями и выполняются предположения* 1–4*. Тогда оценка* $\widehat{\theta}(N)$, *определяемая выражением* (2), *с вероятностью* 1 *при* $N \to \infty$ *существует, единственна и является сильно состоятельной оценкой, т.е.* $\widehat{\theta}(N) \xrightarrow{п.н.} \theta_0$ *при* $N \to \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Thil S.*, *Gilson M.*, *Garnier H.* On instrumental variable-based methods for errors-in-variables model identification. —In: Proceedings of the 17th IFAC World Congress, Seoul, Korea, July 6–11, 2008.
2. *Кацюба О. А.*, *Иванов Д. В.* Идентификация параметров многомерных по входу линейных динамических систем с помехами во входных и выходном сигналах методом стохастической аппроксимации. — Системы управления и информационные технологии, 2009, № 4 (38), с. 15–19.
3. *Иванов Д. В.*, *Кацюба О. А.* Рекуррентная параметрическая идентификация многомерных линейных динамических систем с локально автокоррелированными помехами во входных и выходных сигналах. — Вестник СамГТУ. Серия физ.-матем. науки, 2011, № 4, с. 102–109.