ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 20 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2
2013

М. Д. Миссаров, **А. Ф. Шамсутдинов** (Казань, К(П)ФУ). **О динамике преобразования ренормализационой группы в фермионной иерархический модели.**

Фермионная модель на иерархической решетке задается гамильтонианом

$$H(\psi^*;\alpha)=\sum_{i,j\in\Lambda}\frac{1}{d_n^{\alpha}(i,j)}\,[\overline{\psi}_1(i)\psi_1(j)+\overline{\psi}_2(i)\psi_2(j)]+\sum_{i\in\Lambda}L(\psi^*;r,g),$$

где

$$L(\psi^*;r,g)=r(\overline{\psi}_1(i)\psi_1(i)+\overline{\psi}_2(i)\psi_2(i))+g\,\overline{\psi}_1(i)\psi_1(i)+\overline{\psi}_2(i)\psi_2(i).$$

Иерархическая решетка Λ определяется как множество целых чисел $\mathbf{Z}$ с иерархическим расстоянием $d(i,j)$, $i,j\in\mathbf{N}$, где $d(i,j)=n^{s(i,j)}$, если $i\neq j$; $s(i,j)=\min\{s\colon \text{существует такое } k, \text{что } i\in V_{k,s}, j\in V_{k,s}\}$, $V_{k,s}=\{j\in\mathbf{N}\colon (k-1)\,n^s<j\leqslant k\,n^s\}$; n — размер элементарной ячейки (некоторое фиксированное натуральное число). В узлах этой решетки находятся четырехкомпонентные спины $(\overline{\psi}_1(i),\psi_1(i),\overline{\psi}_2(i),\psi_2(i))$ компоненты которых являются образующими алгебры Грассмана.

Используем вместо лагранжиана $L(\psi^*;r,g)$ понятие грассмановозначной «плотности» свободной меры $f(\psi^*)=\exp\{-L(\psi^*;r,g)\}$. В общем случае «плотность» свободной меры задается выражением $f(\psi^*;c)=c_0+c_1(\overline{\psi}_1\psi_1+\overline{\psi}_2\psi_2)+c_2\overline{\psi}_1\psi_1\overline{\psi}_2\psi_2$, $c=(c_0,c_1,c_2)\in\mathbf{R}^3$.

Мы трактуем набор (c_0,c_1,c_2) как точку двумерного вещественного проективного пространства $\mathbf{RP}^2$, поскольку два набора, отличающиеся друг от друга ненулевым множителем, задают одно и то же гиббсовское состояние.

Блок-спиновое преобразование ренормализационной группы (РГ) Вильсона–Каданова определяется по формуле

$$r(\alpha)\,\psi^*(i)=\frac{1}{\sqrt{n^{\alpha}}}\sum_{j\in V_{i,1}}\psi^*(j).$$

Гауссовская часть гамильтониана модели является инвариантной относительно преобразования РГ, и преобразование РГ сводится к преобразованию $R(\alpha)$ в пространстве констант связи (r,g) или в c-пространстве коэффициентов «плотности» свободной меры: $R(\alpha)\,(c_0,c_1,c_2)=(c_0',c_1',c_2')$. Введем отображение $T(n)$ в c-пространстве: $T(n)(c_0,c_1,c_2)=(c_0',c_1',c_2')$, где

$$\begin{aligned}
c_0'&=\Big((c_1-c_0)^2+\frac{1}{n}\,(c_0c_2-c_1^2)\Big),\\
c_1'&=\Big((c_1-c_0)\,(c_2-c_1)+\frac{1}{n}\,(c_0c_2-c_1^2)\Big),\\
c_2'&=\Big((c_2-c_1)^2+\frac{1}{n}\,(c_0c_2-c_1^2)\Big),
\end{aligned}$$

Пусть также отображение $S(\lambda)$ определяется как $S(\lambda)\,(c_0,c_1,c_2)=(\lambda^{-1}c_0',c_1',\lambda\,c_2')$.

© Редакция журнала «ОПиПМ», 2013 г.

Лемма. *Преобразование ренормализационной группы* $R(\alpha)$ *имеет вид*

$$R(\alpha)\,(c_0, c_1, c_2) = (c_2 - 2c_1 + c_0)^{n-2}\, S(\lambda)\, T(n)\, (c_0, c_1, c_2),$$

где $\lambda = n^{\alpha-1}$. *Если* $c_2 - 2c_1 + c_0 \neq 0$ *и этот сомножитель можно опустить, поскольку рассматривается преобразование в проективном пространстве, то определено обратное отображение* $R(\alpha)^{-1}$, *для которого справедливо представление* $R(\alpha)^{-1} = T(n^{-1})\, S(\lambda^{-1})$.

Преобразование $R(\alpha)$ имеет тривиальную (гауссовскую) неподвижную точку $(1, 0, 0)$ и неподвижную точку $(0, 0, 1)$, которая задает грассманову δ-функцию $\delta(\psi^*) = \overline{\psi}_1\psi_1\overline{\psi}_2\psi_2$. Обозначим эту неподвижную точку δ. Кроме того, имеются еще две негауссовские неподвижные точки.

В работах [1–4] изучалась динамика преобразования $R(\alpha)$. В частности, была получена информация о поведении устойчивых РГ-инвариантных кривых для разных неподвижных точек. Здесь мы приводим некоторые результаты о динамике обратного преобразования $R(\alpha)^{-1}$.

Рассмотрим реализацию проективного c-пространства в виде полусферы $K = \{(c_0, c_1, c_2) \,:\, c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 = 1,\ c_2 \geqslant 0\}$, в которой противоположные точки граничной окружности $c_0^2 + c_1^2 = 1$ отождествлены. Для того чтобы получить плоскую (двумерную) картину, используем ортогональную проекцию K на диск $D = \{(c_0, c_1) \,:\, c_0^2 + c_1^2 \leqslant 1\}$. Тогда регулярной точке (r, g) будет соответствовать точка $(c_0(r, g), c_1(r, g))$, где

$$c_0(r, g) = \frac{1}{\sqrt{1 + r^2 + (r^2 - g)^2}}, \quad c_1(r, g) = -\frac{r}{\sqrt{1 + r^2 + (r^2 - g)^2}}.$$

В этой системе координат тривиальная (гауссовская) неподвижная точка будет представлена точкой $(1, 0)$. Неподвижная точка δ в проекции на диск D задается точкой $(0, 0)$. Линия $g = 0$ в диске D описывается кривой $l_0 = \{(c_0(r, 0), c_1(r, 0)); r \in \mathbf{R}\}$. Дополняя кривую l_0 предельной точкой $(1, 0)$, получаем замкнутую кривую l в c-пространстве, проходящую через гауссовскую и неподвижную δ точки. Нижняя полуплоскость $\{(r, g) \,:\, g < 0\}$ задается в c-пространстве областью D_-, ограниченной кривой l, верхняя полуплоскость $\{(r, g) \,:\, 0 < g\}$ задается областью $D_+ = D \setminus (D_1 \cup l)$. Области D_- и D_+ являются инвариантными относительно преобразования $R(\alpha)^{-1}$. Пусть $B_r(a) = D_+ \cap \{(c_0, c_1) \,:\, c_0 \geqslant (1 - a),\ c_1 \geqslant 0\}$, $B_l(a) = D_+ \cap \{(c_0, c_1) \,:\, c_0 \geqslant (1 - a),\ c_1 \leqslant 0\}, 0 < a < 1$. Области $B_l(a)$ и $B_r(a)$ имеют вид криволинейных треугольников с вершиной в точке $(1, 0)$.

Теорема. *Пусть* $\alpha > 3/2$. *Тогда существует такое значение* $a = a_0$, *что области* $B_l(a_0)$ *и* $B_r(a_0)$ *инвариантны относительно преобразования* $R(\alpha)^{-1}$ *и все точки из этих областей стремятся к гауссовской неподвижной точке* $(1, 0)$ *при итерациях отображения* $R(\alpha)^{-1}$.

На этой теореме основан алгоритм описания глобальной динамики отображения $R(\alpha)^{-1}$. Численные эксперименты показывают, что почти все точки из области D_+ попадают либо в $B_l(a_0)$, либо в $B_r(a_0)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lerner E. Yu.*, *Missarov M. D.* Fixed points of renormalization group in the hierarchical fermionic model. — J. Statist. Phys., 1994, v. 76, № 3/4, p. 805–817.
2. *Миссаров М. Д.* РГ-инвариантные кривые в фермионной иерархической модели. — Теор. матем. физ., 1998, v. 114, № 3, p. 323–336.
3. *Missarov M. D.* Dynamical phenomena in the hierarchical fermionic model. — Phys. Lett., 1999, v. A 253, № 0, p. 41–46.

4. *Missarov M. D.* Renormalization group solution of fermionic Dyson model. — In: Asymptotic Combinatorics with Application to Mathematical Physics. /Ed. by V. A. Malyshev, A. M. Vershik. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002, p. 151–166.