ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 20 МАТЕМАТИКИ Выпуск 3
2013

И. Ю. Седых (Москва, Финансовый Университет при Правительстве РФ). **Некоторые вопросы поведения решения системы стохастических уравнений.**

Пусть $\zeta(t)$ — решение системы стохастических дифференциальных уравнений

$$d\zeta(t) = a(\zeta(t))\,dt + b(\zeta(t))\,dw(t). \tag{1}$$

Пусть решение $\zeta(t)$ при $t=0$ принимает неслучайное значение $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, а коэффициенты $a(x)$ и $b(x)$ раскладываются,

$$a(x) = Ax + \widetilde{a}(x), \quad b(x) = Bx + \widetilde{b}(x), \tag{2}$$

где $A = (a_i^j)$, $B = (b_i^j)$ ($i, j = 1, 2, \ldots, n$) — постоянные матрицы.

Рассмотрим систему линейных стохастических дифференциальных уравнений, соответствующую данной нелинейной системе (1):

$$d\xi(t) = A\xi(t)\,dt + B\xi(t)\,dw(t). \tag{3}$$

Определение. Множество $G(x) = C$ называется *устойчивым по вероятности* для уравнения (1), если для любого $\varepsilon > 0$ выполняется $\lim_{G(x^0)-C\to 0} \mathbf{P}\{\sup_{t\geqslant 0} |G(\zeta(t)) - C| > \varepsilon\} = 0$.

Введем новую функцию $G_1(x) = G(x) - C$.

Теорема 1. *Пусть $G_1(x) = 0$ есть уравнение инвариантного множества* [1] *системы линейных стохастических дифференциальных уравнений* (3), *функция $G_1(x) \in C^2(\mathbf{R}^n)$. Если существует такое $\delta > 0$, что в области $|G_1(x)| < \delta$ верно неравенство $2G_1(x)((\nabla G_1(x), \widetilde{a}(x)) + Q(x)/2) \leqslant -(\nabla G_1(x), \widetilde{b}(X))^2$, то множество $G_1(x) = 0$ устойчиво по вероятности для системы* (1).

Доказательство. Возьмем процесс $\eta(t) = G_1^2(\zeta(t))$. По формуле Ито получим $d\eta(t) = (2G_1(\zeta(t))((\nabla G_1(\zeta(t)), a(\zeta(t))) + ((\nabla^2 G_1(\zeta(t)), b(\zeta(t))), b(\zeta)))/2) + (\nabla G_1(\zeta(t)), b(\zeta(t)))^2)\,dt + 2G_1(\zeta(t))(\nabla G_1(\zeta(t)), b(\zeta(t)))\,dw(t)$.

Используя разложения (2), имеем $d\eta(t) = (L_1 G_1(\zeta(t)) + \widetilde{L}_1 G_1(\zeta(t)))\,dt + L_2 G_1(\zeta(t))\,dw(t)$, где $L_1 G_1(x) = 2G_1(x)((\nabla G_1(x), Ax) + ((\nabla^2 G_1(x), Bx), Bx)/2 + (\nabla G_1(x), Bx)^2)$, $\widetilde{L}_1 G_1(x) = 2G_1(x)((\nabla G_1(x), \widetilde{a}(x)) + Q(x)/2)) + (\nabla G_1(x), \widetilde{b}(x))^2 + 2(\nabla G_1(x), Bx)(\nabla G_1(x), \widetilde{b}(x))$, $L_2 G_1(x) = 2G_1(x)(\nabla G_1(x), b(x))$. Поскольку $G_1(x) = 0$ — уравнение инвариантного множества системы (3), имеем $L_1 G_1(x) = 0$ и $\widetilde{L}_1 G_1(x) = 2G_1(x)((\nabla G_1(x), \widetilde{a}(x)) + Q(x)/2)) + (\nabla G_1(x), \widetilde{b}(x))^2$.

Пусть $U_\delta = \{x\colon |G_1(x)| < \delta\}$ есть δ-окрестность инвариантного множества $G_1(x) = 0$. Возьмем $r < \delta$. Тогда $U_r \subset U_\delta$. Допустим, что $x^0 \in U_r$. Обозначим $\tau_r(t) = \min\{\tau_r, t\}$, где τ_r — момент первого выхода процесса $\zeta(t)$ из области U_r. Если процесс $\zeta(t)$ не выходит за конечное время из U_r. то положим $\tau_r = \infty$. Таким образом, $\eta(\tau_r(t)) = \eta(0) + \int_0^{\tau_r(t)} \widetilde{L}_1 G_1(\zeta(s))\,ds + \int_0^{\tau_r(t)} L_2 G_1(\zeta(s))\,dw(s)$. Тогда $\widetilde{L}_1 G_1(x) \leqslant 0$, поэтому $\eta(\tau_r(t)) \leqslant \eta(0) + \int_0^{\tau_r(t)} L_2 G_1(\zeta(s))\,dw(s)$.

Поскольку $\tau_\delta(t)$ — марковский момент и ограничен с вероятностью единица, получаем $\mathbf{M}\, L_2 G_1(\zeta(s))\, dw(s) = 0$. Следовательно, $\mathbf{M}\, G_1^2(\zeta(\tau_r(t))) \leqslant G_1^2(x^0)$.

Имеет место неравенство $\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant s\leqslant t} G_1^2(\zeta(s)) > \delta^2\} \leqslant \mathbf{P}\{G_1^2(\zeta(\tau_r(t))) \geqslant r^2\}$. Используя неравенство Чебышева, имеем $\mathbf{P}\{G_1^2(\zeta(\tau_r(t))) \geqslant r^2\} \leqslant \mathbf{M}\, G_1^2(\zeta(\tau_r(t)))/r^2 \leqslant G_1^2(x^0)/r^2$. Переходя к пределу при $t \to \infty$, получим $\mathbf{P}\{\sup_{t\geqslant 0} G_1^2(\zeta(t)) > \delta^2\} \leqslant G_1^2(x^0)/r^3$. В силу непрерывности функции $G_1(x)$ для любого $\rho_1 > 0$ существует такое $\rho > 0$, что при $|G_1(x^0)| < \rho$ верно $G_1^2(x^0)/r^3 < \rho_1$. Следовательно, $\rho = r\rho_1$. Теорема доказана.

Докажем теорему об устойчивости по вероятности в предположении, что множество $G_1(x) = 0$ является стационарным [2] для системы (1) и процесс $\zeta(t)$ не достигает границы области $D \subset \mathbf{R}^n$. Считаем, что γ_1 — граница области D — описывается уравнением $x_1 = 0$.

Заметим, что если x^0 находится на стационарном множестве, то $\zeta(t) \in G(x^0)$ для всех $t > 0$, а если $x^0 \in \{G(x) > C_1\}$, то выполняется $\zeta(t) > C$ для всех $t > 0$.

Теорема 2. *Пусть $G_1(x) = 0$ — уравнение стационарного множества системы нелинейных стохастических дифференциальных уравнений* (1), *где $G_1(x) \in C^2(D)$ и $\gamma_1 = \{x_1 = 0\}$. Предположим, что $G_1(x^0) > 0$. Если существует такое $\varepsilon > 0$, что $\{0 < G_1(x) < \varepsilon\} \subset D$ и в области $\{0 < G_1(x) < \varepsilon\} \cap \{x_1 > 0\}$ верно неравенство $(\nabla G_1(x), \widetilde{a}(x)) + Q(x)/2 \leqslant 0,$, то множество $G_1(x) = 0$ устойчиво по вероятности для системы* (1) .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $U_\varepsilon = \{x\colon\ 0 < G_1(x) < \varepsilon\}$ — ε-окрестность множества $G_1(x) = 0$. Для любого $0 < r < \varepsilon$ r-окрестность этого множества содержится в его ε-окрестности. Допустим, что $x^0 \in U_\varepsilon$. Введем процесс $\eta(t) = G_1(\zeta(t))$. Поскольку $G_1(x^0) > 0$ и $G_1(x) = 0$ — стационарное для системы (1), имеем $\eta(t) > 0$ для любого $t > 0$. Пусть τ_r — момент первого достижения процессом $\eta(t)$ границы области U_r . Обозначим $\tau_r(t) = \min\{\tau_r, t\}$. По формуле Ито получим $\eta(\tau_r(t)) = G_1(x^0) + \int_0^{\tau_r(t)} L_1 G_1(\zeta(s))\, ds + \int_0^{\tau_r(t)} L_2 G_1(\zeta(s))\, dw(s)$, где $L_1 G_1(x) = (\nabla G_1(x), a(x)) + ((\nabla^2 G_1(x), b(x)), b(x))/2$ и $L_2 G_1(x) = (\nabla G_1(x), b(x))$. Используем разложения (2) и то, что $G_1(x) = 0$ — уравнение инвариантного множества системы (3). Имеем $L_1 G_1(x) = (\nabla G_1(x), \widetilde{a}(x)) + Q(x)/2$. Выберем $\varepsilon > 0$. Тогда из условий теоремы $L_1 G_1(\zeta(t)) \leqslant 0$. Следовательно, $\eta(\tau_r(t)) \leqslant G_(x^0) + \int_0^{\tau_r(t)} L_2 G_1(\zeta(s))\, dw(s)$. Поскольку $\mathbf{M}\int_0^{\tau_r(t)} L_2 G_1(\zeta(s))\, dw(s) = 0$, получаем $\mathbf{M}\, G_1(\zeta(\tau_r(t))) \leqslant G_1(x)$. Тогда $\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant s\leqslant t} G_1(\zeta(s)) > \varepsilon\} \leqslant \mathbf{P}\{G_1(\zeta(\tau_r(t))) > r\} \leqslant r^{-1}\mathbf{M}\, G_1(\zeta(\tau_r(t))) \leqslant G_1(x^0)/r$. При $t \to \infty$ имеем $\mathbf{P}\{\sup_{t\geqslant 0} G_1(\zeta(t)) > \varepsilon\} \leqslant G_1(x^0)/r$. В силу непрерывности функции $G_1(x)$ для любого $\rho_1 > 0$ существует такое $\rho > 0$, что при $G_1(x^0) < \rho$ верно $G_1(x^0)/r < \rho_1$. Следовательно. $\rho = r\rho_1$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Денисова И. Ю.* О достижимости и устойчивости инвариантного множества системы стохастических дифференциальных уравнений. — Укр. матем. ж., 1992, т. 44, № 4, с. 570–574.
2. *Седых И. Ю.* Асимптотическое поведение решения системы нелинейных диффузионных уравнений. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2001, т. 8, в. 2, с. 799–800.