ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 20 МАТЕМАТИКИ Выпуск 3
2013

И. Куликов (Волгоград, ВолГУ). **Байессовское оценивание параметров смешанной модели, управляемой фрактальным броуновским движением.**

Для описания различных процессов (в т. ч., экономических) применяются математические модели, основанные на предположениях стационарности последовательностей данных. Фрактальное броуновское движение (ФБД) является процессом со стационарными приращениями и, в отличие от винеровского процесса, пригодно для описания процессов, характеризуемых «долгой памятью» (см., например, [1–3]).

Пусть $T \subset R$ — интервал на числовой оси и $(X(t))_{t\in T}$ обозначает процесс изменения цены акции, который удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$X(t) = \mu(t, X(t))\, dt + \sigma_1(t, X(t))\, d\mathrm{W}(t) + \sigma_2(t, X(t))\, d\mathrm{B}(t), \quad X(t_0) = X(0) > 0, \qquad (1)$$

где $\mathrm{B} = (\mathrm{B}(t))_{t\geqslant T}$ — ФБД с показателем Харста $H \in [1/2, 1]$, $\mathrm{W} = (\mathrm{W}(t))_{t\in T}$ — стандартный винеровский процесс, $\mu(t,x)$ и $\sigma_1(t, x_{0,n}) \geqslant 0$, $\sigma_2(t, x_{0,n}) \geqslant 0$ — борелевские функции аргумента $(t,x) \in T \times \mathbf{R}$ со значениями в $\mathbf{R}$.

Параметрическое множество значений $\theta = (\sigma_1, \sigma_2, \mu)$ обозначим Θ и будем полагать его полным метрическим сепарабельным. Пусть θ и (B, W) независимы, и условное распределение неизвестного случайного параметра θ относительно случайной величины $X(0)$ — известно и абсолютно непрерывно относительно σ-конечной меры λ на $\mathfrak{B}(\Theta)$ с плотностью $f_{\theta|X(0)}(\cdot|\cdot)$.

Отметим, что рынок, акции которого описываются равенством (1), не допускает арбитраж (см. [4]), в отличие от геометрического ФБД, которое представляет явную арбитражную стратегию.

Пусть $\{t_0 < t_1 < \cdots\}$ — разбиение множества T с шагом Δ_n, $n \in \mathbf{N}$. Введем обозначение $X(0,n) = (X(t_0), X(t_1), \ldots, X(t_n))$.

В дальнейшем будем обозначать $x_n = x(t_n)$ либо наблюдаемые значения реального процесса, либо результат моделирования процесса как решения стохастического дифференциального уравнения (1) в момент времени t_n, $n \in \mathbf{N}$. Моделирование процесса можно осуществлять, например, как в [4, 5].

Получена рекуррентная оценка колоколообразными функциями условной плотности неизвестного параметра θ модели (1) относительно наблюдений процесса $(X(t))_{t\in T}$.

Теорема. *Плотность $f_{\theta|X(0,n)}(y\,|\,x_{0,n})$ условного распределения параметра θ относительно $X(0,n)$ удовлетворяет рекуррентному уравнению*

$$f_{\theta|X(0,n+1)}(y\,|\,x_{0,n+1}) = \frac{\Lambda_n(y, x_{0,n+1})\, f_{\theta|X(0,n)}(y\,|\,x_{0,n})}{\displaystyle\int_{\Theta} \Lambda_n(y, x_{0,n+1})\, f_{\theta|X(0,n)}(y\,|\,x_{0,n})\, \lambda(dy)}$$

при $y \in \Theta$, *где*

$$\Lambda_n(\theta, x_{0,n+1}) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[x_{n+1} - \mu(t_n, x_n)\,\Delta_{n+1} - x_n\right]\left(\sigma_1(t_n, x_n)\sqrt{\Delta_{n+1}} + \sigma_2(t_n, x_n)\,\Delta_{n+1}^H\right)\right\}}{\sqrt{2\pi\left(\sigma_1(t_n, x_n)\sqrt{\Delta_{n+1}} + \sigma_2(t_n, x_n)\Delta_{n+1}^H\right)}}.$$

В докладе представлены результаты статистического анализа параметров данной модели при различных предположениях о наблюдениях и определении коэффициентов уравнения рассматриваемой модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hu Y.*, *Oksendal B.* Fractional white noise calculus and applications to finance. — Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 6, 2003, p. 1-32.
2. *Mishura Y. S.* Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes. — In: Springer, Lecture Notes in Mathematics, 2008, p. 393.
3. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 1, 2. М.: Фазис, 1998, 512 с.
4. *Valkeila E.* On the approximation of geometric fractional brownian motion, Optimality and Risk — Modern Trends in Mathematical Finance, 2010, p. 251–266.
5. *Колодий Н. А.* О сходимости дискретных аппроксимаций стохастических уравнений Вольтерра на плоскости. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2003, т. 10, в. 3, с. 671–672.