О Б О З Р Е Н И Е
П Р И К Л А Д Н О Й И П Р О М Ы Ш Л Е Н Н О Й
Т о м 20 М А Т Е М А Т И К И В ы п у с к 3
2013

О. С. М е д в е д е в (Казань, КПФУ). **Асимптотика d-гарантийных критериев проверки многомерных гипотез.**

В эксперименте наблюдается последовательность независимых одинаково распределенных двумерных случайных векторов (X_i, Y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, имеющих нормальное распределение с известной матрицей ковариации Σ. Вектор средних значений (θ_1, θ_2) является реализацией нормального случайного вектора $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ с известными вектором средних $(\theta_{10}, \theta_{20})$ и матрицей ковариации $\mathcal{T}$. Требуется проверить гипотезу $H_0 : (\theta_1, \theta_2) \in \Theta_0$, при альтернативе $H_1 : (\theta_1, \theta_2) \notin \Theta_0$, где область $\Theta_0 = \{(\theta_1, \theta_2) : (\theta_1 < \theta_{10}) \cap (\theta_2 < \theta_{20})\}$.

Задача состоит в построении решающей функции δ, принимающую значения d_0 (— верна гипотеза H_0) и d_1 (— верна альтернатива), удовлетворяющей заданному ограничению на величину d-риска первого рода: $P((\vartheta_1, \vartheta_2) \notin \Theta_0 \,|\, \delta = d_0) \leqslant \alpha$ и минимизирующей величину d-риска второго рода $P((\vartheta_1, \vartheta_2) \in \Theta_0 \,|\, \delta \neq d_0)$.

Как известно (см. [1]), оптимальный критерий для проверки такой гипотезы принимает решение d_0, если апостериорная вероятность справедливости гипотезы $P((\vartheta_1, \vartheta_2) \in \Theta_0 \,|\, (x, y)) > c$, где (x, y) — вектор выборочных средних, константа c находится из условия равенства d-риска первого рода заданному ограничению α. Параметры апостериорного многомерного распределения также нормальны (см. [2]). Практическая реализация такого критерия сопряжена с большими вычислительными сложностями. Поэтому представляет интерес построение асимптотических аналогов оптимального критерия, имеющих простую структуру.

Лемма. *Для каждого фиксированного n область принятия гипотезы вида $P((\vartheta_1, \vartheta_2) \in \Theta_0 \,|\, (x, y)) \geqslant c, (x, y) \in R^2$, есть выпуклое множество с асимптотически линейными границами: $y \approx k_x x + b_x$ при $x \to \infty$ и $x \approx k_y y + b_y$ при $y \to \infty$.*

Можно показать, что $k_x = -a_1 n + a_2$ и $k_y = -a_3 n + a_4$, где $a_1, \ldots, a_4$ — некоторые константы.

Теорема 1. *Для любых Σ и $\mathcal{T}$ при $n \to \infty$ асимптоты границы области принятия гипотезы оптимальным критерием ортогональны и совпадают с направлением осей координат.*

В связи с этим можно рассматривать упрощенную решающую функцию, отвергающую гипотезу H_0, если отвергается соответствующая одномерная гипотеза хотя бы для одной из наблюдаемых компонент. Аналогичное утверждение было установлено в работе [3] для наблюдений с независимыми компонентами.

Таким образом, вводится новая решающая функция δ_1, принимающая d_0, если $(x < c_x) \& (y < c_y)$ и d_1 иначе. Ответ на вопрос определения констант c_x, c_y дает следующая теорема.

Теорема 2. *При каждом n константы c_x, c_y являются решением системы уравнений*

$$\begin{cases} A_1(c_x\sqrt{n}\Phi(c_x\sqrt{n}) + \varphi(c_x\sqrt{n}) + A_2(c_y\sqrt{n}\Phi(c_y\sqrt{n}) + \varphi(c_y\sqrt{n})) = \sqrt{n}\alpha_0, \\ A_3(c_x\sqrt{n}\Phi(c_x\sqrt{n}) + \varphi(c_x\sqrt{n}) + A_4(c_y\sqrt{n}\Phi(c_y\sqrt{n}) + \varphi(c_y\sqrt{n})) = \sqrt{n}\alpha_1, \end{cases}$$

если решение существует. Здесь $A_1, \dots, A_4$ *— константы, имеющие сложную зависимость от* Σ *и* $\mathcal{T}$, $\Phi(x)$ *есть стандартная нормальная функция распределения,* $\varphi(x)$ *— ее плотность,* α_0, α_1 *— ограничения на* d *-риски.*

Численными методами показано, что минимальный объем выборки оптимального критерия и покомпонентного критерия близки, также показано, что d-риски второго рода оптимальной и упрощенной решающих функций при одинаковом ограничении на d-риск первого рода отличаются незначительно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Володин И. Н.*, *Новиков А. А.*, *Симушкин С. В.* Гарантийный статистический контроль качества: апостериорный подход. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 1994, т. 1, в. 2, с. 1–32.
2. *DeGroot*, *Morris H.* Optimal Statistical Decisions. Wiley Classics Library, 2004. (Originally published in 1970.)
3. *Медведев О. С.* Оптимальные критерии проверки многомерных гипотез в d-апостериорном подходе. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2011, т. 18, в. 1, с. 87.