ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 20 МАТЕМАТИКИ Выпуск 3
2013

И. В. Мисюра (Ростов-на-Дону, ЮФУ). **Фильтрация в моделях со скачками. Метод Монте-Карло.**

Значительный интерес к сигналам со скачками обусловлен многочисленными приложениями. Адекватной моделью для процессов со скачками являются процессы Леви [1] с негауссовскими законами распределений. Дискретные аналоги процессов Леви также рассматриваются во многих работах в связи с разнообразными приложениями, например, в работе [2]. В докладе используется иная, чем в [2], модель процесса со скачками.

Задача оценки процесса $\mathbf{X}$ по наблюдаемому процессу $\mathbf{Y}$ решается в дискретной и конечной постановке, при которой процессы представляются случайными векторами. Под оптимальной оценкой понимается условное математическое ожидание $\mathbf{E}(\mathbf{X}\,|\,\mathbf{Y})$. Предполагается существование структурного вектора δ, определяющего местоположение и характер скачков процесса $\mathbf{X}$. Условный закон распределения $Law(\mathbf{Y}\,|\,\mathbf{X})$ является многомерным нормальным законом распределения с ковариационной матрицей $C_{\mathbf{Y}}$ и математическим ожиданием $\mathbf{X}$, условный закон распределения $Law(\mathbf{X}\,|\,\delta)$ — многомерный нормальный закон с ковариационной матрицей $C_{\mathbf{X}}(\delta)$ и нулевым математическим ожиданием. Таким образом, условный закон распределения $Law(\mathbf{X}\,|\,\mathbf{Y},\delta)$ является нормальным законом распределения с ковариационной матрицей $(C_{\mathbf{Y}}^{-1} + C_{\mathbf{X}}^{-1}(\delta))^{-1}$ и математическим ожиданием $M(\mathbf{Y},\delta) = (C_{\mathbf{Y}}^{-1}+C_{\mathbf{X}}^{-1}(\delta))^{-1}C^{-1}\mathbf{Y}$, т. е. сигнал описывается параметризованным семейством нормальных законов. Оптимальная оценка вычисляется как повторное математическое ожидание:

$$\widehat{\mathbf{X}} = \mathbf{E}\mathbf{E}(\mathbf{X}\,|\,\mathbf{Y},\delta). \tag{1}$$

Внутреннее математическое ожидание $\mathbf{E}(\mathbf{X}\,|\,\mathbf{Y},\delta) = M(\mathbf{Y},\delta)$. Внешнее математическое ожидание вычисляется методом Монте-Карло

$$\mathbf{E}M(\mathbf{Y},\delta) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{E}M(\mathbf{Y},\delta^{(i)}), \tag{2}$$

где $\delta^{(i)}$ — сгенерированные траектории процесса δ.

В связи с предлагаемым методом оценки рассмотрим следующую модель: $C_{\mathbf{Y}}^{-1} = \alpha E$, компоненты вектора $\mathbf{X}$ подчиняются уравнениям: $x(0) = 0$, $x(i) - x(i-1) = \delta(i)r(i)$. Вектор $\mathbf{R}$ распределен по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и обратной ковариационной матрицей $C_{\mathbf{R}}^{-1} = \beta E$. Отсюда $C_{\mathbf{X}}^{-1} = \beta A^T D(\delta) A$. Следовательно, матрица $C_{\mathbf{Y}}^{-1}+C_{\mathbf{X}}^{-1}(\delta)$ является трехдиагональной и число операций при вычислении $M(\mathbf{Y},\delta)$ пропорционально размерности вектора $\mathbf{Y}$. Процесс δ, отвечающий за скачки, является марковской цепью с пространством состояний $H = \{1,\gamma\}$, причем $\gamma > 1$, и матрицей переходных вероятностей $\prod = \left(\begin{smallmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{smallmatrix}\right)$, причем a близко к единице и b близко к нулю. Генерация траекторий $\delta^{(i)}$ также не требует больших вычислительных затрат. Таким образом, предлагаемый нелинейный метод фильтрации сигналов является вычислительно эффективным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Appelbaum D.* Levy Processes and Stochastic Calculus. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009, p. 460.
2. *Белявский Г. И.*, *Никоненко Н. Д.* Алгоритм расчета безарбитражной цены финансового обязательства на основе дискретизации процессов Леви. — Научно-технические ведомости СПбГПУ, 2012, т. 3, в. 150, с. 56–59.