ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 20 МАТЕМАТИКИ Выпуск 3
2013

А. В. Н е к л ю д о в (Москва, МГТУ). **Асимптотика решений уравнения Гаусса-Бибербаха-Радемахера во внешней области.**

Уравнение Гаусса-Бибербаха-Радемахера

$$\Delta u = ke^u \tag{1}$$

(где Δ есть n-мерный оператор Лапласа, $k = k(x) > 0$) в неограниченных областях цилиндрической формы и поведение его решений рассматривалось при $k \equiv 1$ в [1, 2]. Результаты [1, 2] были распространены [3] на общее эллиптическое уравнение второго порядка с переменными коэффициентами в дивергентной форме, заданное в цилиндре.

Представляет интерес и изучение поведение решений уравнения (1) и в других неограниченных областях, в частности во внешности шара. Двумерное уравнение вида (1) возникает в геометрии поверхностей отрицательной гауссовой кривизны. А именно, если первая квадратичная форма поверхности гауссовой кривизны $K(x,y) < 0$ имеет в некоторых координатах вид $ds^2 = e^u(dx^2 + dy^2)$, то [4] функция $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению $\Delta u = -2K(x,y)e^u$. Таким образом уравнение (1) описывает связь римановой метрики и гауссовой кривизны поверхности.

Результат данной работы заключается в получении асимптотики решений двумерного уравнения (1) вне круга при $k = k(x,y) \equiv 1$.

Теорема. *Пусть* $u(x,y)$ *— решение уравнения* (1) *при* $n = 2$ *и* $k \equiv 1$ *в области* $Q = \{r^2 > R_0^2\}$, $r = (x^2+y^2)^{1/2}$, $R_0 = \text{const} > 0$. *Тогда* $u(x,y)$ *ведет себя при* $r \to \infty$ *одним из следующих двух способов*:

1) $u = C\ln r + C_1 + O(r^{-\lambda})$, $C, C_1 = \text{const}$, $C < -2$, $\lambda = \min\{1, -2-C\} > 0$;
2) $u = -2\ln r - 2\ln\ln r + C_1 + o(1)$, $C_1 = \text{const}$.

Примерами решений (1), ведущих себя во внешности круга одним из указанных способов, являются решения $u = -\ln r - 2\ln(r-a) + \ln(2a)$, ($a = \text{const} > 0$, в этом случае $C = -3$, $C_1 = \ln(2a)$, $\lambda = 1$) и $u = -2\ln r - 2\ln\ln r + \ln 2$ соответственно.

Отметим, что в многомерном случае ($n \geqslant 3$) уравнение (1) не может [5, 6] иметь решений во внешности шара при $k(x) \equiv \text{const} > 0$ и даже при условии $k(x) \geqslant c_0|x|^{-2}\ln^{-1}|x|$, $c_0 = \text{const} > 0$, для достаточно больших $|x|$. Таким образом задача поиска асимптотики решений (1) во внешних областях при данном ограничении на $k(x)$ исчерпывается двумерным случаем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Oleinik O. A.* Some asymptotic problems of the theory of partial differential equations. Lezioni Lincei, Accademia Naz. dei Lincei. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996.
2. *Насруллаев А. И.* Об асимптотике решений задачи Неймана для уравнения $\Delta u - e^u = 0$ в полубесконечном цилиндре. — Успехи матем. наук, 1995, т. 50, № 3, с. 161–163.

3. *Неклюдов А. В.* Поведение решений полулинейного эллиптического уравнения второго порядка вида $Lu = e^u$ в бесконечном цилиндре. — Матем. заметки, 2009, т. 85, № 3, с. 408–420.
4. *Векуа И. Н.* О некоторых свойствах решений уравнения Гаусса. — Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова, 1961, т. 64, с. 5–8.
5. *Неклюдов А. В.* Об отсутствии решений уравнения Гаусса.— Обозрение прикл. и промышл. матем., 2012, т. 19, № 5, с. 728–729.
6. *Неклюдов А. В.* Об отсутствии глобальных решений уравнения Гаусса и решений во внешних областях.— Изв. ВУЗов. Математика (в печати).