ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 20 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2013

М. С. Т и х о в, **Т. С. Б о р о д и н а**, **М. С. И в к и н** (Нижний Новгород, ННГУ). **Критерии согласия на основе оценок квантильной функции.**

Пусть $(u_i, W_i), 1 \leqslant i \leqslant n$ и $u_0 = 0 < u_1 < \dots < u_n < u_{n+1} = 1$ — заданы, где $W_i = I(X_i < u_i), 1 \leqslant i \leqslant n$ есть независимые индикаторы событий $(X_i < u_i), 1 \leqslant i \leqslant n$, случайные величины X_i $(i = 1, \dots, n)$ имеют функцию распределения $F(x)$ и плотность $f(x)$ с носителем на отрезке $[0, 1]$. В работе [1] были предложены оценки квантиля $x_\lambda = F^{-1}(\lambda)$ заданного порядка $0 < \lambda < 1$ распределения $F(x)$ вида

$$\widehat{x}_{1,n}(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} H_d \left(\frac{\lambda - \widehat{F}_{nh_r}(i/n)}{h_d} \right),$$

где

$$H_d(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} K_d(y)\, dy, \quad F_{nh_r}(x) = \frac{1}{nh_r} \sum_{i=1}^{n} W_i K_r \left(\frac{x - U_i}{h_r} \right),$$

$K_r(x)$ и $K_d(x)$ ядерные функции, h_r и h_d — соответствующие сглаживающие параметры (ширина окна просмотра данных), (подробнее см. [1], [2]).

В настоящем сообщении мы рассматриваем асимптотическое поведение статистики — интегрированной квадратичной ошибки (ИКО)

$$J_n = \int_0^1 (\widehat{x}_{1,n}(\lambda) - x_\lambda)^2\, \omega(\lambda)\, d\lambda,$$

где $\omega(\lambda)$ есть некоторая неотрицательная весовая функция.

В случае оценок Надарая-Ватсона центральная предельная теорема для интегрированных квадратичных ошибок была получена в работах [3] и [4], а для суммируемых квадратичных уклонений в работе [5]. Наиболее полное исследование ИКО в зависимости «доза-эффект» проведено в работе [6]. Мы будем предполагать, что выполнены условия работы [2], а функцию $\omega(\lambda)$ возьмем такой, чтобы вводимые ниже интегралы сходились. Мы доказываем слабый закон больших чисел, а также центральную предельную теорему для интегрированных квадратичных ошибок J_n ядерной оценки квантильной функции $F^{-1}(\lambda)$.

Теорема. *Предположим, что выполнены указанные выше условия и* $h_r \to 0$, $nh_r^2 \to \infty$ *при* $n \to \infty$.

1) *Если* $nh_r^5 \to \infty$, *то*

$$n^{1/2} h_r^{-2} (J_n - c(n)) \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{D}} N(0, 4\sigma_1^2).$$

2) *Если* $nh_r^5 \to 0$, *то*

$$nh_r^{1/2} (J_n - c(n)) \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{D}} N(0, \sigma_2^2).$$

3) *Если* $nh_r^5 \to \mu$, $0 < \mu < \infty$ *то*

$$n^{9/10}(J_n - c(n)) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} N(0, 4\mu^{4/5}\sigma_1^2 + \mu^{-1/5}\sigma_2^2),$$

где

$$c(n) = \mathbf{E}[J_n] = \int (\mathbf{E}(\widehat{x}_{1,n}(\lambda)) - x_\lambda)^2 \omega(\lambda)\, d\lambda + (nh_r)^{-1}\sigma_3^2,$$

$$\sigma_1^2 = (1/4)\nu_r^4 \|K_r\|^4 \int f^{-4}(x_\lambda)\lambda(1-\lambda)(f'(x_\lambda))^2\omega^2(\lambda)\, d\lambda, \quad \nu_r = \int x^2 K_r(x)\, dx,$$

$$\sigma_2^2 = 2\int f^{-4}(x_\lambda)\lambda^2(1-\lambda)^2\omega^2(\lambda)\, d\lambda \int \left(\int K_r(x)K_r(x+y)\, dx\right)^2 dy,$$

$$\sigma_3^2 = \|K_r\|^2 \int f^{-2}(x_\lambda)\lambda(1-\lambda)\omega(\lambda)\, d\lambda, \quad \|K_r\|^2 = \int K_r^2(x)\, dx.$$

Статистику J_n предлагается использовать для проверки гипотезы согласия $H_0 : F(x) = F_0(x)$ против альтернативы $H_1 : F(x) \neq F_0(x)$.

Изучены также сумммируемые квадратичные уклонения оценок $\widehat{x}_{1,n}(\lambda)$. Рассмотрено поведение интегрированных квадратичных ошибок на основе оценок $\widehat{x}_{2,n}(\lambda)$ (см. [2] и [7]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dette H.*, *Neumeyer N.*, *Pilz K. F.* A note on nonparametric estimation of the effective dose in quantal bioassay. — J. Amer. Statist. Assoc., 2005, v. 100, № 470, p. 503–510.
2. *Тихов М. С.* Непараметрическое оценивание эффективных доз по данным бинарных откликов. — Уфимский математический журнал, 2013, т. 5, № 2, с. 94–108.
3. *Конаков В. Д.* Об одной глобальной мере отклонения оценки линии регрессии. — Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. XXII, в. 4, с. 879–888.
4. *Hall P.* Integrated square error properties of kernel estimators of regression functions. — Ann. Statist., 1984, v. 12, № 1, p. 241–260.
5. *Тихов М. С.*, *Криштопенко Д. С.* Асимптотические распределения суммируемых квадратичных уклонений оценок функции распределения в зависимости доза-эффект. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 5, с. 772–786.
6. *Криштопенко Д. С.* Тестирование распределений в зависимости доза-эффект: Дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-матем. наук. Нижний Новгород, 2010, 337 с.
7. *Тихов М. С.*, *Бородина Т. С.* Асимптотическая нормальность ядерных оценок квантильной функции. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2012, т. 19, в. 5, с. 806–807.