ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 20 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2013

А. В. Иванов (Москва, МИЭМ НИУ ВШЭ). **Асимптотически оптимальные критерии в задаче различения гипотез о распределении случайного вектора — II.**

В работе, представленной данным докладом, продолжены исследования, представленные автором в [3–4]. Напомним постановку задачи в общем виде.

Пусть имеются независимые случайные векторы с независимыми координатами $\overline{X}_t = (X_{t1}, X_{t2}, \ldots, X_{tm}) \in \mathbf{B}^m$, $\mathbf{B} = \{0,1\}$, $\mathbf{P}\{X_{tj} = \tau\} = 1/2$, $\tau \in \mathbf{B}$, $j = 1,2,\ldots,m$, $t = 1,2,\ldots$ Рассмотрим независимые случайные векторы с независимыми координатами $\overline{\varepsilon}_t = (\varepsilon_{t1}, \varepsilon_{t2}, \ldots, \varepsilon_{tm}) \in \mathbf{B}^m$, не зависящие от векторов $\{\overline{X}_t\}_{t=1}^{\infty}$, $\mathbf{P}\{\varepsilon_{tj} = \tau\} = (1 + (-1)^{\tau}\delta_j)/2$, $\tau \in \mathbf{B}$, $j = 1,2,\ldots,m$, $t = 1,2,\ldots$, $0 \leqslant \delta_j \leqslant 1$, $\overline{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m)$.

Пусть задана произвольная псевдобулева функция $f(\overline{x})\colon \mathbf{B}^m \to \mathbf{R}$, $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbf{B}^m$. Рассмотрим последовательность случайных величин $\eta_t^* = f(\overline{X}_t \oplus \overline{\varepsilon}_t) + \xi_t^*$, где ξ_t^* $(t = 1,2,\ldots)$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\mathcal{L}(\xi_t^*) = \mathbf{N}(m, \sigma^2)$, не зависящие от векторов $\{\overline{X}_t\}_{t=1}^{\infty}$, $\{\overline{\varepsilon}_t\}_{t=1}^{\infty}$, $\oplus$ — покоординатное сложение векторов по модулю 2.

Перейдем к новой последовательности случайных величин $\eta_t = (\eta_t^* - m)/\sigma = \lambda f(\overline{X}_t \oplus \overline{\varepsilon}_t) + \xi_t$, где ξ_t $(t = 1,2,\ldots)$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\mathcal{L}(\xi_t) = \mathbf{N}(0,1)$, $\lambda = \sigma^{-1}$.

Далее обозначим $\varphi(z) = (2\pi)^{-1/2} e^{-z^2/2}$ — плотность, $\varPhi(z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(u)\,du$ — функцию распределения в точке $z \in \mathbf{R}$, $\zeta_p = \varPhi^{-1}(p)$ — квантиль распределения $\mathbf{N}(0,1)$ уровня p, $p \in (0,1)$.

Предположим, что наблюдению доступна последовательность независимых случайных векторов вида $(\eta_t, \overline{X}_t) = (\lambda f(\overline{X}_t \oplus \overline{\varepsilon}_t) + \xi_t, \overline{X}_t)$, $t = 1,2,\ldots$ Каждая наблюдаемая последовательность однозначно задается функцией f и параметрами $\overline{\delta}$, λ (или параметром $\sigma = \lambda^{-1}$), при которых обозначим $p_{f,\lambda,\overline{\delta}}(z, \overline{x})$, $z \in \mathbf{R}$, плотность распределения вероятностей случайного вектора $(\eta_t, \overline{X}_t)$ в том смысле, что для любых измеримых множеств $A \subset \mathbf{R}$, $C \subset B^m$ имеет место $\mathbf{P}\{\eta_t \in A, \overline{X}_t \in C\} = \sum_{\overline{x} \in C} \int_A p_{f,\lambda,\overline{\delta}}(z, \overline{x})\,dz$.

При заданных функции f и значениях параметров $\overline{\delta}$, λ однозначно задана гипотеза $H_{f,\lambda,\overline{\delta}}$. Дополнительно рассмотрим гипотезу $H^0 : \lambda = 0$, при которой $\eta_t = \xi_t$. Эта гипотеза в дальнейшем играет вспомогательную роль. Требуется построить асимптотически оптимальный критерий (асимптотическая оптимальность критерия определена, например, в [7, с. 105]) различения гипотез $H_{f,\lambda,\overline{\delta}}$ и $H_{f^*,\lambda^*,\overline{\delta}^*}$ по выборке $\{(\eta_t, \overline{X}_t)\}_{t=1}^{\infty}$ в условиях схемы серий при $n \to \infty$, $\lambda = \lambda(n) \to 0$, $\lambda^* = \lambda^*(n) \to 0$, а также найти вероятностные характеристики критерия, в частности, асимптотически минимальный объем выборки при заданных вероятностях ошибок первого и второго рода.

Далее рассматривается «однородный» случай в том смысле, что $\delta_j \equiv \delta$, $j = 1, 2, \dots, m$, $\lambda \equiv \lambda^*$ и, таким образом, задача сводится к различению гипотез $H_{f,\lambda,\delta}$ и H_{f^*,λ,δ^*} .

В рамках исследований представленной модели к настоящему времени автором получены следующие результаты.

Первая группа результатов связана с рассмотрением функции конкретного вида: $f(\overline{x}) = \|\overline{x}\| = \sum_{j=1}^m x_j$. В этом случае случайный вектор $\overline{X}_t \oplus \overline{\varepsilon}_t$ представляет собой хорошо известную модель двоичного симметричного канала (ДСК), а случайная величина $\lambda\|\overline{X}_t \oplus \overline{\varepsilon}_t\| + \xi_t$ — канала с аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ) (подробнее о терминологии см., например, [1, с. 85, 115]). Для этого частного случая в работе [3] построены критерии различения гипотез $H_{\|\overline{x}\|,\lambda,0}$ и $H_{\|\overline{x}\|,\lambda,1}$, $H_{\|\overline{x}\|,\lambda,0}$ и $H_{\|\overline{x}\|,\lambda,\lambda\rho}$ при произвольном $\rho > 0$, а также рассчитан минимальный объем выборки при заданных вероятностях ошибок первого и второго рода. Исследования проводились в условиях схемы серий при $n \to \infty$, $\lambda = \lambda(n) \to \infty$, $n\lambda^2 = \gamma > 0$. Здесь же отметим, что близкие по постановкам и методам решения задачи для случая $\mathbf{P}\{\overline{X}_t = \overline{X}\} = 1$, $t = 1, 2, \dots$ (т. е. в условиях накопления наблюдений над одним и тем же вектором $\overline{X}$) неоднократно рассматривались в литературе (см., например, [2, 5, 6]).

Вторая группа результатов связана с построением критериев различения гипотез общего вида — $H_{f,\lambda,\delta}$ и H_{f^*,λ,δ^*} . В частности, при $\delta = \mathrm{const}$, $\delta^* = \mathrm{const}$ и либо $f(\overline{x}) \neq f^*(\overline{x})$, либо $\delta \neq \delta^*$, в работе [4] получены соответствующие асимптотические результаты.

Целью настоящей работы является построение асимптотически оптимальных критериев различения гипотез вида $H_{f,\lambda,\delta}$ и H_{f,λ,δ^*} . Поскольку функция f при обеих гипотезах одна и та же, в дальнейшем обозначим эти гипотезы H_δ и H_{δ^*} , а $p_\delta(z, \overline{x})$, $p_{\delta^*}(z, \overline{x})$ — плотности при гипотезах H_δ и H_{δ^*} соответственно.

В области $\prod_{t=1}^n p_\delta(\eta_t, \overline{X}_t) p_{\delta^*}(\eta_t, \overline{X}_t) > 0$ статистика отношения правдоподобия оптимального критерия различения гипотез H_δ и H_{δ^*} имеет вид

$$L_{\delta,\delta^*} = \ln\left(\prod_{t=1}^n \frac{p_\delta(\eta_t, \overline{X}_t)}{p_{\delta^*}(\eta_t, \overline{X}_t)}\right) = \sum_{t=1}^n \ln\left(\frac{p_\delta(\eta_t, \overline{X}_t)}{p^0(\eta_t, \overline{X}_t)}\right) - \sum_{t=1}^n \ln\left(\frac{p_{\delta^*}(\eta_t, \overline{X}_t)}{p^0(\eta_t, \overline{X}_t)}\right),$$

где $p^0(z, \overline{x})$ обозначает соответствующую плотность распределения при справедливости гипотезы H^0 .

Далее обозначим $\mathcal{L}_\delta(\cdot)$, E_δ распределение и математическое ожидание соответствующей статистики при гипотезе H_δ , а E_0 — математическое ожидание при гипотезе H^0 . Символом $\Rightarrow$ далее обозначается слабая сходимость вероятностных мер. Будем считать, что заданы вероятности ошибок критерия первого и второго рода $\alpha < 1/2$, $\beta < 1/2$.

Теорема 1. *Пусть* $n \to \infty$, $\lambda = \lambda(n) \to 0$, $n\lambda^2 = \gamma = \mathrm{const} > 0$, $\delta = \mathrm{const}$, $\delta^* = \rho\lambda$, $\rho = \mathrm{const} > 0$ *и* $\nu_{\delta,\delta^*} = E_0(a_1(f, \delta, \overline{X}_t) - a_{10}(f, \overline{X}_t))^2 > 0$, *где* $a_k(f, \delta, \overline{X}) = E_\delta(f(\overline{X} \oplus \overline{\varepsilon})t)^k = \sum_{j=0}^m a_{kj}(f, \overline{x})\delta^j$. *Тогда*

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\delta(L_{\delta,\delta^*}) \ \Rightarrow\ \mathbf{N}(\gamma\nu_{\delta,\delta^*}/2; \gamma\nu_{\delta,\delta^*}) & \textit{при гипотезе } H_\delta; \\ \mathcal{L}_{\delta^*}(L_{\delta,\delta^*}) \ \Rightarrow\ \mathbf{N}(-\gamma\nu_{\delta,\delta^*}/2; \gamma\nu_{\delta,\delta^*}) & \textit{при гипотезе } H_{\delta^*}. \end{cases}$$

Минимальный объем выборки для различения указанных гипотез асимптотически равен $n_{\delta,\delta^*} \sim (\zeta_\alpha + \zeta_\beta)^2/(\lambda^2\nu_{\delta,\delta^*})$.

В частности, следствием теоремы при $f(\overline{x}) = \|\overline{x}\| = \sum_{j=1}^m x_j$, $\delta = 0$ является теорема 2 в [3].

Теперь рассмотрим случай, когда $\delta = \rho\lambda$, $\delta^* = \rho^*\lambda$, $\rho \neq \rho^*$, $\rho = \mathrm{const} > 0$, $\rho^* = \mathrm{const} > 0$.

Теорема 2. *Пусть* $n \to \infty$, $\lambda = \lambda(n) \to 0$, $n\lambda^4 = \gamma = \mathrm{const} > 0$, $\delta = \rho\lambda$, $\delta^* = \rho^*\lambda$, $\rho = \mathrm{const} > 0$, $\rho^* = \mathrm{const} > 0$, $\rho \neq \rho^*$, *и* $s_{\rho,\rho^*} = (\rho - \rho^*)^2 E_0(a_{11}(f, \overline{X}_t))^2$, *где* $a_{kj}(f,\overline{x})$ *определено в формулировке теоремы* 1 . *Тогда*

$$\begin{cases}\mathcal{L}_\rho(L_{\rho,\rho^*}) \ \Rightarrow \ \mathbf{N}(\gamma s_{\rho,\rho^*}/2;\gamma s_{\rho,\rho^*}) & \text{при гипотезе } H_\rho;\\ \mathcal{L}_\rho(L_{\rho,\rho^*}) \ \Rightarrow \ \mathbf{N}(-\gamma s_{\rho,\rho^*}/2;\gamma s_{\rho,\rho^*}) & \text{при гипотезе } H_{\rho^*}.\end{cases}$$

Минимальный объем выборки для различения указанных гипотез асимптотически равен $n_{\rho,\rho^*} \sim (\zeta_\alpha+\zeta_\beta)^2/(\lambda^4 s_{\rho,\rho^*})$.

Обратим внимание на то, что минимальный объем выборки в теореме 1 составляет величину порядка $O(\lambda^{-2})$, тогда как в теореме 2 — $O(\lambda^{-4})$. Этот эффект объясняется различным поведением параметров δ , δ^* в зависимости от n .

В дальнейшем наибольший интерес представляют следующие задачи: 1) рассмотрение общей схемы серий, в которой при $n\to\infty$ одновременно изменяются все параметры ($f=f_n$, $\lambda=\lambda_n$, $\delta=\delta_n$), и построение асимптотически оптимальных критериев различения соответствующих гипотез; 2) рассмотрение многомерного случая $\overline{\delta}=(\delta_1,\ldots,\delta_m)$, когда все параметры изменяются в зависимости от $j=1,2,\ldots,m$ по различным законам; 3) рассмотрение других операций (например, сложения по некоторому модулю) вместо операции $\oplus$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вернер М.* Основы кодирования (серия «Мир программирования»). М.: Техносфера, 2004, 288 с.
2. *Иванов А. В.* Оптимальный критерий различения n нормальных гипотез. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2001, т. 8, в. 2, с. 762–763.
3. *Иванов А. В.* Асимптотически наиболее мощный критерий различения гипотез о распределении случайного вектора. — В сб.: Материалы Десятой общероссийской научной конференции «Математика и безопасность информационных технологий (МаБИТ-2011)». М.: МАКС-ПРЕСС, 2012, с. 93–97.
4. *Иванов А. В.* Асимптотически оптимальные критерии в задаче различения гипотез о распределении случайного вектора. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2013, т. 20, в. 2, с. 139–141.
5. *Пазизин С. В.* Обнаружение и прием последовательности сигналов, искаженных случайной помехой и независимым шумом. — Проблемы передачи информации, 1998, т. 34, №1, с. 46–55.
6. *Пазизин С. В.* Вероятности правильного декодирования для канала с аддитивным нормальным шумом и двоичного симметричного канала при случайном выборе кодовых слов. — Дискретн. матем., 2000, т. 12, в. 2, с. 93–98.
7. *Русас Дж.* Контигуальность вероятностных мер. М.: Мир, 1975, 256 с.
8. *Чибисов Д. М.* Теорема о допустимых критериях и ее применение к одной асимптотической задаче проверки гипотез. — Теория вероятн. и ее примен., 1967, т. XXI, в. 1, с. 96–111.