ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 20 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2013

С. В. Гарбарь ((Великий Новгород, НовГУ). **Совместные плотности распределения членов последовательностей, моделируемых алгоритмами авторегрессии.**

Рассматривается задача моделирования (имитации) стационарных в узком смысле случайных процессов $\{Y(t)\}$. Обычно для решения данной задачи используются алгоритмы авторегрессии, определяемые разностными уравнениями с постоянными либо случайными коэффициентами [1]:

$$Y(t) = a_1Y(t-1) + a_2Y(t-2) + \cdots + a_nY(t-n) + bX(t).$$

В работе [2] рассмотрена задача нахождения плотности $f(x)$ распределения прибавляемой на каждом шаге алгоритма авторегрессии независимой случайной величины X для случая детерминированных коэффициентов и экспоненциальной корреляционной функции. В работе [3] предложена модификация алгоритма, позволяющая моделировать последовательности с непрерывным равномерным одномерным распределением членов и экспоненциальной корреляционной функции.

Наличие нескольких методов моделирования последовательностей с заданным одномерным распределением требует наличия возможности качественного их сравнения. Очевидным критерием является сложность реализации моделирующего алгоритма. С другой стороны, разумным видится рассмотрение совместной плотности распределения $g(y_1, y_2)$ соседних членов $Y(t-1)$ и $Y(t)$ получаемых последовательностей.

Для непрерывного равномерного распределения плотность прибавляемой случайной величины равна $f(x) = (n+1)^{-1}\sum_{k=0}^{n}\delta(x-k/n)$ (при $a = 1/(n+1)$, $n \in \mathbf{N}$), совместная плотность имеет вид

$$g(y_1, y_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{b}\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\delta\left(y_2 - ay_1 + \dfrac{i}{n+1}\right), & \text{при } y_1 \in [0,\,1] \text{ и } y_2 \in [0,\,1];\\ 0, & \text{при } y_1 \notin [0,\,1] \text{ или } y_2 \notin [0,\,1]. \end{cases}$$

Для показательного распределения (с плотностью $g(y;\lambda) = \lambda e^{-\lambda y}$ при $y > 0$) прибавляемая случайная величина имеет плотность $f(x) = a\delta(x) + bg(x;\lambda b)$; совместная плотность равна

$$g(y_1, y_2) = \begin{cases} b^{-1}\lambda e^{-\lambda x}(a\delta(ay_1 - y_2) + b\lambda b e^{\lambda(ay_1 - y_2)}), & \text{если } y_1 \geqslant 0 \text{ и } y_2 \geqslant ay_1,\\ 0, & \text{если } y_1 < 0 \text{ или } y_2 < ay_1. \end{cases}$$

При использовании алгоритма, манипулирующего участками функции плотности с коэффициентом алгоритма, равным B:

$$g(y_1, y_2) = \begin{cases} 2, & \text{при } y_1 \in [0,\,1] \text{ и } y_2 \in [0,\,1] \text{ и } (y_2 < C \text{ или } y_2 > \overline{C}),\\ 1, & \text{при } y_1 \in [0,\,1] \text{ и } y_2 < C \text{ и } y_2 < \underline{C} \text{ и } y_2 > -C \text{ и } y_2 < \overline{C},\\ 0, & \text{при } y_1 < 0 \text{ или } y_1 > 1 \text{ или } y_2 < 0 \text{ или } y_2 > 1 \text{ или } y_2 > \underline{C} \text{ или } y_2 > \overline{C} \end{cases}$$

(здесь $C = (1/2 - y_1)/B$, $\underline{C} = 1 - C$, $\overline{C} = 1 + C$).

В случае использования алгоритмов авторегрессии со случайными ортогональными коэффициентами совместная плотность стремится к $g(y_1, y_2) = a_1 f(y_1)\delta(y_1 - y_2) + (1 - a_1) f(y_1) f(y_2)$.

На примере авторегрессии со случайными коэффициентами видно, что отдельные члены полученной последовательности могут повторяться с ненулевой вероятностью, что может неполно отражать суть моделируемых явлений. В случае алгоритмов авторегрессии для моделирования последовательностей с показательным и равномерным распределением совместная плотность также сосредоточена на нескольких отрезках или лучах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кирьянов Б. Ф.* Имитация случайностей в задачах математического моделирования. — Вестник Новгородского гос. ун-та, 1995, № 1, с. 115-118.
2. *Гарбарь С. В.* Моделирование стационарных марковских случайных процессов с заданной плотностью распределения методом авторегрессии. — Вестник Новгородского гос. ун-та. Сер.: Технические науки, 2012, № 67, с. 13–15.
3. *Гарбарь С. В.* Манипулирование участками функции плотности при моделировании случайных последовательностей с равномерным распределением. — Вестник Новгородского гос. ун-та. Сер.: Технические науки, 2010, № 60, с. 27–28.