ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 20 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2013

Е. Н. Ж и д к о в (Москва, МГТУ им. Н. Э. Баумана). **О численном решении задачи цементации.**

При создании нужной концентрации углерода по глубине образца возникает ряд математических задач. Пусть нам надо к моменту времени $t = T$ создать концентрацию $C(x)$ углерода вдоль однородного стержня длины l. Поперечное сечение и другие свойства стержня постоянны. Углерод проникает в стержень сквозь левый торец. Требуется подобрать поток так, чтобы обеспечить заданную концентрацию к моменту времени T. Задачи, в которых функция $C(x)$ считалась известной, рассматривались автором в [1–2]. В действительности мы можем измерять значение функции $C(x)$ лишь в конечном числе точек. В работе, представленной данным сообщением, мы рассматриваем условие контроля лишь в трех точках: x_0, x_1 и x_2.

Сформулируем математическую постановку задачи.

Решение прямой задачи. Обозначим $u(x,t)$ концентрацию в момент времени t в точке x. Тогда функция $u(x,t)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad x \in (0,l), \quad t \in [0,T], \\ &u(0,x) = u_0, \quad u(t,1) = u_0, \quad -D\frac{\partial u(t,0)}{\partial x} = \beta(t)[u(t,0)]^{-\delta}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $D(t,x,u) = \alpha_0 u(t,x) + \alpha_1$, $u_0, \alpha_1, \alpha_2 = \mathrm{const} > 0$, $\delta \in (0,1)$, $\beta(t)$ — кусочно-гладкая функция, $\beta(t) \geqslant 0$.

Для численного решения поставленной задачи дискретизируем ее. Для этого введем равномерную сетку $\omega_{h\tau} = \{(x_i,t_j)\,,\ x_i = ih\,,\ t_j = j\tau\}\,,\ h = l/N\,,\ \tau = T/M\}$.

Для решения прямой задачи (1) введем чисто неявную схему [3]

$$\begin{aligned} &\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = \frac{1}{h^2}\Big[k_i^j\Big(u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1}\Big) - k_{i-1}^j\Big(u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}\Big)\Big], \\ &u_i^0 = u_0, \quad u_N^j = u_0, \quad -\frac{D_0^j(u_1^{j+1} - u_0^{j+1})}{h} = \beta^{j+1}[u_0^j]^{-\delta}. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $k_i^j = [\alpha_0(u_{i+1}^j + u_i^j) + 2\alpha_1]/2$.

Так как задача (2) линейна по u_i^{j+1}, будем решать ее методом прогонки [4]. Предполагая наличие зависимости $u_{i-1}^{j+1} = c_i^{j+1}u_i^{j+1} + d_i^{j+1}$, получим зависимости для прогоночных коэффициентов:

$$\begin{aligned} &c_i^{j+1} = \frac{k_i^j}{k_i^j + k_{i-1}^j(1 - c_i^{j+1}) + h^2/\tau}, \quad c_1^{j+1} = 1, \\ &d_i^{j+1} = \frac{h^2u_i^j/\tau + k_{i-1}^j d_i^{i+1}}{k_i^j + k_{i-1}^j(1 - c_i^{j+1}) + h^2/\tau}, \quad d_1^{j+1} = \frac{h\beta^{j+1}[u_0^j]^{-\delta}}{D_0^j}. \end{aligned}$$

Очевидно, что коэффициенты c_i^j удовлетворяют соотношению $|c_i^j| < 1$, $i > 1$, что обеспечивает устойчивость решения задачи (2).

Решение обратной задачи. Пусть нам известно решение задачи (1) при $t = T$, $x = x_i$, $u(x_i, T) = C(x_i)$, $i = 0, 1, 2$. Требуется, зная $c_i = C(x_i)$, найти такую функцию $\beta(t)$, чтобы выполнялось

$$\Phi \equiv \sum_{i=0}^{2} (u(x_i, T) - c_i)^2 < \varepsilon^2.$$

Очевидно, что поставленная задача имеет бесконечное множество решений. Следуя методу А. Н. Тихонова [5], введем стабилизатор $\Omega(\beta) = \int_0^T [(\beta'(t))^2 + (\beta(t))^2]\, dt$, $\beta(t) \geqslant 0$.

Для устойчивого решения обратной задачи будем минимизировать функционал (см. [5])

$$M^\alpha(\beta) = \Phi + \alpha\Omega(\beta),$$

где α — положительный параметр. В силу неотрицательной определенности функционала такой минимум существует. Параметр α будем выбирать из условия $\Phi = \delta^2$, где δ — погрешность измерения функции $C(x)$.

Проведенные численные эксперименты показывают, что при достаточно малом α $(\alpha < 0,001)$ функция $\beta(t)$ стабилизируется и выполняется неравенство $\Phi \leqslant \delta^2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zhidkov E. N.* On optimisation of Steel Cementation Problem. — In: Modern Trends in Computational Physics (Dubna, June 15-20, 1998). Dubna, 1998.
2. *Жидков Е. Н.* Об обратной задаче нелинейной теплопроводности. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2011, т. 18, в. 3.
3. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978, 512 с.
4. *Жидков Е. Н.* Вычислительная математика. М.: Издательский центр Академия, 2010, 208 с.
5. *Тихонов А. Н.*, *Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1978.