ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 20 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2013

А. В. Ласунский (Великий Новгород, НовГУ). **О свойствах решений дискретного периодического логистического уравнения.**

Рассмотрим систему разностных уравнений

$$x_{n+1} = X(x_n, n),\ X(x_n, n+\omega) = X(x_n, n), \quad \omega \neq 1.$$

Пусть эта система имеет Ω — периодическое решение $\varphi(n)$, $\Omega \neq 1$. Имеет место теорема [1], которую можно считать дискретным аналогом теоремы Массера-Курцвейля.

Теорема *Если* НОД $(\omega, \Omega) = 1$, *то для любого* $n_0 \in Z_+$ *имеем*

$$X(\varphi(n_0), n) = X(\varphi(n_0), n_0) = \text{const}\,.$$

Из этой теоремы сразу следует, что логистическое уравнение

$$x_{n+1} = x_n \exp\{r_n(1 - x_n)\} \tag{1}$$

с ω — периодическим коэффициентом $r_n\,(\omega \neq 1)$ не может иметь Ω — периодического решения $(\Omega \neq 1)$, период которого взаимно прост с ω. В работе [2] показано, что если для периодической положительной последовательности $\{r_n\}$ выполнено неравенство $\max\limits_{n\in N}\{r_n\} \leqslant 2$, то все положительные решения уравнения (1) стремятся к положительному равновесию.

Если положительная ω — периодическая последовательность $\{r_n\}$ такова, что

$$\prod_{k=0}^{\omega-1}(1 - r_k) > 1, \tag{2}$$

то уравнение (1) имеет не менее двух положительных ω — периодических решений, отличных от положения равновесия [3].

Разумеется, в этом случае не может идти речи о глобальной асимптотической устойчивости. Заметим, что из неравенства (2) следует, что среди членов положительной ω — периодической последовательности $\{r_n\}$ есть $r_n > 2$. Даже если все члены периодической последовательности $\{r_n\}$ принадлежат интервалу (2; 2,526), уравнение (1) может иметь решения с периодами 4, 6 и т. д. Как мы знаем, это невозможно в случае постоянного коэффициента $r_n = r \in (2; 2,256)$. Здесь уместно привести следующий результат, касающийся автономного случая [4]. Если при частном значении параметра логистическое или другое одномерное отображение $x_{n+1} = f(x_n)$ имеет решение периода три, то оно имеет бесконечное множество решений всех прочих периодов. Заметим, что самые общие закономерности сосуществования периодических решений различных периодов в одномерных непрерывных отображениях установил А. Н. Шарковский [5]. В работе [1] построены примеры ω — периодического логистического уравнения, имеющего периодические решения периода $\omega, 2\omega, 3\omega$. Решения исследованы на устойчивость. Примеры показывают отсутствие явной связи бифуркационных значений параметра r логистического уравнения $x_{n+1} = x_n \exp\{r(1 - x_n)\}$

со значениями периодического коэффициента r_n с точки зрения существования периодических решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ласунский А. В.* О периоде решений дискретного периодического логистического уравнения. — Тр. КарНЦ РАН, 2012, №5, с. 44-48.
2. *Xiang Hong-jun*, *Liao Lu-sheng*, *Wang Jin-hua* Global attractivity of a nonautonomous discrete Smith equation. — J. Changde Teach. Univ. Sci. Ed., 2001, v. 13, №1, p. 13–15.
3. *Ласунский А. В.* О циклах дискретного периодического логистического уравнения. — Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН, 2010, т. 16, №2, с. 154–157.
4. *Li T.-Y.*, *Yorke J. A.* Period three implies chaos. — Amer. Math. Monthly, 1975, v. 82, p. 982–985.
5. *Шарковский А. Н.* Сосуществование циклов непрерывного отображения прямой в себя. — Укр. матем. ж., 1964, № 1, с. 61–71.