О Б О З Р Е Н И Е
П Р И К Л А Д Н О Й И П Р О М Ы Ш Л Е Н Н О Й
Т о м 20 М А Т Е М А Т И К И В ы п у с к 5
2013

Г. И. Б е л я в с к и й, **Н. Д. Н и к о н е н к о** (Ростов-на-Дону, ЮФУ, Южно-Российский институт-филиал РАНХиГС). **Вычисление условных математических ожиданий при дискретизации процессов Леви по времени.**

В работе рассматривается задача вычисления математического ожидания от функции с ограниченной производной

$$V(t,x)=\mathbf{E}f(X_t+x), \tag{1}$$

где X_t — процесс Леви с локальными характеристиками $(m,\sigma^2,\lambda F(dx))$. Для решения (1) применяются различные численные методы, связанные с решением интегро-дифференциального уравнения: метод сеток, метод факторизации ВинераХопфа, метод Галеркина, метод линий, подробней см. в [1]. В докладе используется метод бинарного дерева см., например, [2]. Разобьем интервал $[0,t]$ на N_t равных частей. Положим

$$Y_k=Y_{k-1}+h_k, \quad Y_0=x. \tag{2}$$

Приращения $h_k=m\frac{t}{N_t}+\varepsilon_k+\sigma\sqrt{t/N_t}\delta_k$. Случайные величины ε_k независимы и представимы в виде:

$$\varepsilon_k=\sum_{j=1}^{\xi_k}\eta_j^{(k)}, \tag{3}$$

где ξ_k — случайные величины, независимые и одинаково распределенные по закону Пуассона с интенсивностью $\lambda t/N_t$, η_j — независимые случайные величины с общим законом распределения $F(dx)$, δ_k — независимые стандартные нормальные величины. Отметим, что $Y_{N_t}\stackrel{d}{=}X_t+x$, следовательно, $V(t,x)=\mathbf{E}f(Y_{N_t})$. Рассмотрим процесс

$$\overline{Y}_k=\overline{Y}_{k-1}+\overline{h}_k, \quad \text{где} \quad \overline{h}_k=m\frac{t}{N_t}+\rho_k\zeta_k+\sigma\sqrt{t/N_t}\delta_k \tag{4}$$

ζ_k — независимые случайные величины с общим законом распределения $F(dx)$, $\rho_k=\xi_k I_{\{\xi_k\leqslant 1\}}$. Заметим, что ρ_k — бинарные случайные величины с вероятностями $p=\mathbf{P}\{\rho_k=1\}=(\lambda t/N_t)e^{-\lambda t/N_t}$. Рассмотрим $\overline{V}(t,x)=\mathbf{E}f(\overline{Y}_{N_t})$. Является справедливым следующее утверждение.

Утверждение. Если $|f'(x)|\leqslant A$, $\mathbf{E}\,|\zeta_k|\leqslant B$, *то для всех* x *и* t

$$\big|V(t,x)-\overline{V}(t,x)\big|\leqslant AB\lambda t\exp\Big\{-\frac{\lambda t}{N_t}\Big\}\Big(\exp\Big\{\frac{\lambda t}{N_t}\Big\}-1\Big). \tag{5}$$

Оценка (5) позволяет определить необходимое число N_t при заданной точности вычислений. Естественно, что вычисление $\overline{V}$ существенно проще вычисления V, что позволяет построить эффективный вычислительный метод расчета математического ожидания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кудрявцев О. Е.* Современные численные методы решения интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в приложениях. М.: Вузовская книга, 2010.
2. *Белявский Г. И.*, *Данилова Н. В.* Диффузионные модели со случайным переключением параметров. Саарбрюккен: LAP. 2012.