ОБОЗРЕНИЕ ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

Том 20 **Выпуск 3**

2013

М. И. Толовиков (Череповец, ЧГУ). **Закон больших чисел для случайных процессов с независимыми переходами в состояниях.**

Мы определим класс случайных процессов, обобщающих в некотором направлении дискретные однородные цепи Маркова, и сформулируем для этого класса достаточные условия выполнения закона больших чисел.

Пусть $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ есть случайный процесс с дискретным временем и конечным множеством состояний $E=\{1,2,\dots,d\}$. Определим последовательности случайных величин $\{\tau_n^{(r)}\}_{n=1}^{\infty}$, $r=1,2,\dots,d$, равенствами $\tau_1^{(r)}=\min\{t\geqslant 0\colon\ X_t=r\}$, $\tau_{n+1}^{(r)}=\min\{t>\tau_n^{(r)}\colon\ X_t=r\}$ при $n\geqslant 1$. Таким образом, $\tau_n^{(r)}$ — момент n-го попадания траектории процесса $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ в состояние r. В дальнейшем предполагаем выполненным следующее условие:

(i) $\mathbf{P}\{\tau_n^{(r)}<\infty\}=1$, $r=1,2,\dots,d$, $n=1,2,\dots$, т.е. траектория процесса $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ с вероятностью 1 возвращается в каждое состояние из E бесконечно много раз. Следовательно, все $\tau_n^{(r)}$ — собственные случайные величины.

Рассмотрим последовательности случайных величин $\{X_n^{(r)}\}_{n=1}^{\infty}$, определяемые равенствами $X_n^{(r)}=X_{\tau_n^{(r)}+1}$, $r=1,2,\dots,d$, $n=1,2,\dots$, т.е. $X_n^{(r)}$ есть состояние, непосредственно следующее в траектории процесса $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ за n-м попаданием в состояние r. Случайный процесс $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ назовем *процессом с независимыми переходами в состояниях*, если он обладает следующим свойством:

(ii) случайная величина X_0 и последовательности $\{X_n^{(r)}\}_{n=1}^{\infty}$, $r=1,2,\dots,d$, независимы в совокупности, т.е. $\mathbf{P}\{X_0=j_0,X_1=j_1,\dots,X_t=j_t\}=\mathbf{P}\{X_0=j_0\}\prod_{r=1}^{d}\mathbf{P}\{X_1^{(r)}=j_1^{(r)},\dots,X_{n_r}^{(r)}=j_{n_r}^{(r)}\}$ для всех $t\geqslant 0$, $j_0,j_1,\dots,j_t\in E$, где n_r — число элементов последовательности $j_0,j_1,\dots,j_t$, для которых предшествующий элемент равен r, $j_1^{(r)},j_2^{(r)},\dots,j_{n_r}^{(r)}$ — подпоследовательность последовательности $j_0,j_1,\dots,j_t$, состоящая из тех ее элементов, которые непосредственно следуют за вхождениями r (при $n_r=0$ считаем r-й множитель равным единице).

Условию (ii) удовлетворяет дискретная цепь Маркова с конечным множеством состояний. Условие (i) при этом означает возвратность всех состояний. Таким образом, условие (ii) можно рассматривать как ослабление марковского свойства.

Пусть $\nu_i^{(r)}(n)$ — число состояний, равных i, среди $X_1^{(r)},X_2^{(r)},\dots,X_n^{(r)}$ и $\nu_r(t)$ — число посещений состояния r траекторией процесса $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ за первые t шагов.

Теорема. *Пусть существуют такие неотрицательные числа p_{ri}, что $\sum_{i=1}^{d}p_{ri}=1$ для всех $r=1,2,\dots,d$ и $\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\{\max_{1\leqslant i\leqslant d}|\nu_i^{(r)}(n)/n-p_{ri}|<\varepsilon\}=1$ для любого $\varepsilon>0$. Если цепь Маркова с матрицей переходных вероятностей $(p_{ri})_{r,i=1}^{d}$ является эргодической и $(\pi_r)_{r=1}^{d}$ — ее стационарное распределение, то для любого $\varepsilon>0$*

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant r\leqslant d}\left|\frac{\nu_r(t)}{t}-\pi_r\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 11-01-00139а.