ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 20 МАТЕМАТИКИ Выпуск 5
2013

Е. А. П о т е х и н а (Череповец, ЧГУ). **Применение произведения Адамара в задаче вычисления производящей функции вероятностей замощения прямоугольника плитками.**

Рассмотрим задачу замощения прямоугольника плитками в динамике. Будем укладывать верхний ряд прямоугольника размером $2\times n$ плитками размером 1×1, 1×2, 1×3, …, имеющими соответственно вероятности выпадения q_1, q_2, q_3, …, а нижний ряд — плитками размером 1×1, 1×2, 1×3, …, с вероятностями выбора на каждом шаге p_1, p_2, p_3, …, соответственно.

Укладку верхнего ряда будем выполнять последовательно слева направо до тех пор, пока верхний ряд не станет выступать над нижним. Затем выполняем укладку нижнего ряда последовательно слева направо до тех пор, пока нижний ряд не станет выступать относительно верхнего. Таким образом, чередуя укладку верхнего и нижнего ряда, заполняем весь прямоугольник. В случае, когда не выступает ни верхний ряд, ни нижний, будем полагать, что выступает нижний ряд, и переходить к укладке верхнего ряда.

Пусть $(X_k)_{k=1}^{\infty}$ и $(Y_k)_{k=1}^{\infty}$ — не зависящие друг от друга последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих неотрицательные целые значения, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{P}\{X_1 = k\}\,x^k = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k$ и $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{P}\{Y_1 = k\}\,x^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k$, причем q_k — вероятность того, что первая плитка верхнего ряда будет иметь длину k, а p_k — вероятность того, что первая плитка нижнего ряда будет иметь длину k.

Произведением Адамара степенных рядов $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k x^k$ и $H(x) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k x^k$ называется степенной ряд $G(x) * H(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k h_k x^k$.

Рассмотрим производящую функцию $F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} p_{n,m} x^n t^m$, где $p_{n,m}$ — вероятность того, что в случайном процессе на каком-то шаге появится прямоугольник длины n, состоящий из m плиток.

Теорема. *В принятых выше обозначениях справедливо равенство*

$$F(x,t) = \frac{1}{1 - f(x)t} * \frac{1}{1 - g(x)t}.$$

Информация о вероятности $p_{n,m}$ может быть использована при разработке алгоритмов распределения ресурсов в вычислительных сетях с grid-архитектурой [1]. Под плитками понимаются задачи, поступающие в вычислительную сеть, под длиной плитки — время, необходимое для решения данной задачи, под рядом плиток — последовательность задач, направляемых управляющим узлом сети конкретному вычислительному узлу. Тогда $p_{n,m}$ — вероятность того, что за время n два вычислительных узла завершат выполнение m текущих задач. Рассматривая k рядов плиток, получим решение для k вычислительных узлов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жук С. Н.* Об онлайн-алгоритмах упаковки прямоугольников в несколько полос. — Дискретн. матем., 2007, т. 19, в. 4, с. 117–131.