ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 20 МАТЕМАТИКИ Выпуск 5
2013

Е. В. Крахоткина (Ставрополь, ФГАОУ ВПО «СКФУ»). **Использование локально-одномерных схем для решения задачи перераспределения давления многокомпонентных рассолов в пористых средах.**

Процесс перераспределения давления в пористой среде описывается уравнением пьезопроводности

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \chi^2\Big(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\Big),$$

решением которого является функция

$$p(t,x,y,z) = p_1(t,x) \times p_2(t,y) \times p_3(t,z),$$

причем $p_1(t,x), p_2(t,y), p_3(t,z)$ являются решениями одномерных краевых задач, которые подробно рассмотрены в [1].

В работе [1] найдено решение задачи построения функции перераспределения давления многокомпонентного рассола в пористой среде аналитическими и численными методами. Целью данной работы является построение этой функции с использованием локально-одномерных схем [2], на примере получения аналитических зависимостей для вычисления значений функции $p_1(t,x)$, удовлетворяющих условию краевой задачи (1)–(3).

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = \chi^2\frac{\partial^2 p_1}{\partial x} \qquad (0 \leqslant x \leqslant l_1, 0 \leqslant t \leqslant T), \tag{1}$$

$$p_1(0,x) = \varphi_1(x), \tag{2}$$

$$\begin{cases} p_1(t,0) = 0 \quad \text{или} \quad p_1\big|_{x=0} = 0\,, \\ p_1(t,l_1) = 0 \quad \text{или} \quad p_1\big|_{x=l_1} = 0\,. \end{cases} \tag{3}$$

Для этого покроем всю область распространения многокомпонентного рассола равномерной сеткой с шагом h и определим разностную аппроксимацию оператора $A_\alpha:\ \Lambda_\alpha = -(\Lambda_{x\alpha}\nabla_{x\alpha})/(h^2)$, $\alpha = 1,\dots,n.$ Тогда для каждого $t \in [t_i, t_{i+1}]$ уравнение, определяемое равенством (1), может быть представлено в виде последовательности уравнений:

$$\frac{\partial p_{1\alpha}}{\partial t} + A_\alpha p_{1\alpha} = 0 \tag{4}$$

с начальными условиями

$$p_1(0,x) = \varphi, \quad p_{11}(t_j,x) = p_{1n}(t_j,x), \qquad j = 1,2,\dots,$$

$$p_{1,\alpha}(t_j,x) = p_{1,\alpha-1}(t_j,x), \qquad j = 0,1,\dots, \quad \alpha = 2,3,\dots,n,$$

где $p_1(t_{j+1},x) = p_{1n}(t_{j+1},x)$, $A_\alpha = -\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}$, $x_i \in \Sigma$, $i = 1,2,\dots,n$, $x_\alpha \in (0,1)$, $\alpha = 1,2,\dots,n$, при этом граничные значения для функции $p_{1,\alpha}$ задаются в точках $x_\alpha = 0$ и $x_\alpha = 1$.

Переходя в равенстве (4) к разностным аппроксимациям по пространственным переменным, при условии, что $p_{1,\alpha}$ — заданный вектор, Λ_α — матрица, Σ — сетка, покрывающая участок пористой среды, в котором происходит перераспределение давления, $\partial\Sigma_\alpha$ — сеточная область в точках $x_\alpha = 0$ и $x_\alpha = 1$, а затем, выполнив аппроксимацию по переменной t двухслойной неявной схемой первого порядка, получим расчетные формулы соответствующие локально-одномерной схеме:

$$\frac{\varphi_{1\alpha}^{j+1} - \varphi_{1\alpha}^{j}}{\tau} + \Lambda_\alpha \varphi_{1\alpha}^{j+1} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 0, 1, \ldots$$

с начальными и граничными условиями $p_{1,1}^0 = g$, $p_{1,1}^j = p_{1,n}^j$, $j = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} p_{1,\alpha}^{j} &= p_{1,\alpha-1}^{j-1}, \qquad \alpha = 2, 3, \ldots, n, \quad j = 0, 1, \ldots, \\ p_{1,\alpha}^{j+1}\big|_{\partial\Sigma_\alpha} &= p_{1,(\Sigma)}(t_{j+1}). \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Борисенко А. А.*, *Семенчин Е. А.*, *Крахоткина Е. В.*, *Брацихин А. А.* Математическое моделирование фильтрационно-диффузионных процессов в пористых средах (на примере мышечной ткани): монография. Ставрополь, СевКавГТУ, 2009, 170 с.
2. *Агошков В. И.*, *Дубовский П. Б.*, *Шутяев В. П.* Методы решения задач математической физики: учебное пособие для студентов ВУЗов. М.: Физматлит, 2002, 320 с.