ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 20 МАТЕМАТИКИ Выпуск 5
2013

В. В. Киселев (Москва, Финансовый университет при Правительстве РФ). **Об одном классе Λ-монотонных функций.**

Теорема *Пусть функция $F(x)$ строго выпукла и дифференцируема на выпуклом заданном множестве $X \subset R^N$ и $\nabla F(x) \neq \overline{0}$ на множестве X, тогда $F(x)$ Λ-монотонна на X.*

Доказательство. Для доказательства данной теоремы достаточно указать такое направление S (фиксированное для всего множества X), что для любой точки $x \in X$, $\Gamma(X)$ существует число $\beta > 0$, с которым $[x, x - \beta s] \subset X$ и $F(x - \beta s) < F(x)$, т.е. направление S должно быть возможным и подходящим направлением. Поскольку функция $F(x)$ строго выпукла на выпуклом множестве, то существует единственная точка глобального минимума $x^0 \in X$. Покажем, что направление $S = \nabla F(x^0)$ является подходящим, т.е. для любой внутренней точки x^1 множества X выполнено $(\nabla F(x^0), \nabla F(x^1)) > 0$. Введем следующие обозначения: для любой точки $x^k \in X$ множество $(+, x^k) = \{x \mid (\nabla F(x^k), x) > 0\}$ и множество $(-, x^k) = \{x \mid (\nabla F(x^k), x) < 0\}$. Заметим, что в силу строй выпуклости $F(x)$ для любой точки $x \in (+, x^k) \cap X$ выполнено $F(x) > F(x^k)$ $x \neq x^k$. Покажем, что для точки глобального минимума x^0 возможен только случай $x - x^0 \in (+, x^0) \cap X$.

Пусть данное утверждение неверно, тогда $x^1 - x^0 \in (-, x^0) \cap X$ и $F(x^1) > F(x^0)$, и для любого $t \in (0, 1]$ выполняется $F(x^0 + t(x^1 - x^0)) > F(x^0)$. Используя линейную часть формулы Тейлора, можно записать $F((x^0 + t(x^1 - x^0) \approx F(x^0) + (\nabla F(x^0), t(x^1 - x^0)) = F(x^0) + t(\nabla F(x^0), x^1 - x^0)$. Поскольку $x^1 - x^0 \in (-, x^0)$, то $(\nabla F(x^0), x^1 - x^0) < 0$, и, значит, $F(x^0 + t(x^1 - x^0)) < F(x^0)$. Получили противоречие.

Мы показали, что для любой точки $x \in X$ и $x \neq x^0$ возможно неравенство

$$(x - x^0, \nabla F(x^0)) > 0. \tag{1}$$

Пусть x^1 есть внутренняя точка множества X, тогда существует $\lambda > 0$, что $x^1 + \lambda \nabla F(x^1) \in X$. Тогда из (1) следует, что $0 < (x^1 - x^0 + \lambda \nabla F(x^1), \nabla F(x^0)) = \lambda(\nabla F(x^1), \nabla F(x^0))$.

Используя неравенство (1), можно записать: $0 < (x^1 - x^0, \nabla F(x^0))$, а это означает, что $(\nabla F(x^1), \nabla F(x^0)) > 0$.