О Б О З Р Е Н И Е
П Р И К Л А Д Н О Й И П Р О М Ы Ш Л Е Н Н О Й
Т о м 20 М А Т Е М А Т И К И В ы п у с к 2
2013

И. В. П а в л о в (Ростов-на-Дону, РГСУ). **Деформированные мартингалы.**

Пусть дано фильтрованное пространство $(\Omega, (\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty})$ с дискретным временем и рассмотрим семейство $\mathbf{Q} = (Q_{n-1}^n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ вероятностных мер Q_{n-1}^n на $\mathcal{F}_n$. Обозначим $Q_n^n = Q_n^{n+1}|_{\mathcal{F}_n}$ для любого $n \in \mathcal{N} = \{0, 1, \ldots\}$. Семейство $\mathbf{Q}$ (см. [1]) мы называем *деформацией* 1*-го рода* — D1 (соответственно, 2*-го рода* — D2), если для любого $n \in \mathcal{N}$ выполняется соотношение $Q_n^n << Q_{n-1}^n$ (соответственно, $Q_n^n >> Q_{n-1}^n$). Если $\mathbf{Q}$ есть одновременно D1 и D2, то такую деформацию мы называем *слабой* — WD. Введем процесс плотностей $(g_{n-1}^n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ (соответственно, $(h_{n-1}^n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty})$): $dQ_n^n = g_{n-1}^n \, dQ_{n-1}^n$ (соответственно, $dQ_{n-1}^n = h_{n-1}^n Q_n^n$).

Обозначим $E_{n-1}^n f = E^{Q_{n-1}^n}[f|\mathcal{F}_{n-1}]$ (для удобства полагаем $\mathcal{F}_{-1} = \{\Omega, \varnothing\}$). Пусть процесс $\mathbf{Z} = (Z_n, \mathcal{F}_n, Q_{n-1}^n)_{n=0}^{\infty}$ входит в $L_1(\Omega, \mathbf{Q})$, т. е. $E^{Q^{(n)}}(|Z_n|) < \infty$ для любого $n \in \mathcal{N}$. Если $\mathbf{Q}$ есть D1 (D2), то процесс $\mathbf{Z}$ мы называем *деформированным мартингалом* 1*-го рода* — DM1 (2-го рода — DM2) при выполнении для любого $n \in \mathcal{N}$ равенств $E_n^{n+1} Z_{n+1} = Z_n$ Q_n^n-п. н. (соответственно., Q_{n-1}^n-п. н.). Аналогично определяются суб- и супер-мартингалы 1-го и 2-го рода — DSubM1, DSupM1, DSubM2, DSupM2.

В [2, 3] был представлен ряд результатов, являющихся обобщениями на деформированные мартингалы классических мартингальных теорем (см. [4]). Речь шла о разложении Дуба, разложении Крикеберга и теореме Дуба о преобразовании свободного выбора. При наложенных в этих результатах ограничениях схемы их доказательств были подобны (при некоторой технической подготовке) классическим схемам доказательств. В первой части настоящего докладе будут обсуждены вопросы выполнения указанных фактов при нарушении указанных ограничений.

1. Разложение Дуба было получено для D1 с ограниченными плотностями g_{n-1}^n. Будут рассмотрены случаи с неограниченными плотностями и случаи с D2.

2. Разложение Крикеберга было получено для D2 с ограниченными плотностями h_{n-1}^n. Будут рассмотрены случаи с неограниченными плотностями и случаи с D1.

3. Теорема Дуба о преобразовании свободного выбора была получена в случае произвольных деформаций для соседних моментов остановки, а в случае D2 — при равномерно ограниченных плотностях h_{n-1}^n для достаточно широкого класса моментов остановки (включающего ограниченные). Будут рассмотрены остальные возможные случаи.

Кроме того, будут приведены новые результаты для деформированных мартингалов (вычисление квадратичных характеристик, теорема Рисса, определение и свойства локальных деформированных мартингалов).

Во второй части доклада будут сформулированы некоторые идеи перенесения понятий деформированного стохастического базиса и деформированного мартингала на фильтрованные пространства с непрерывным временем: для D2 — в общей постановке, для D1 — в случае существования специальных регулярных условных вероятностей (при дискретном времени это соответствует их существованию для $Q^n_{n-1}[A|F_{n-1}]$, где $A \in F_n$).

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 13-01-00637а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Назарько О. В.*, *Павлов И. В.*, *Чернов А. В.* Деформации и деформированные стохастические базисы. — В сб.: Математические методы в современных и классических моделях экономики естествознания. Ростов-на-Дону: РГЭУ (РИНХ), 2012, с. 37–53.
2. *Назарько О. В.* О некоторых фактах теории деформированных мартингалов. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2010, т. 17, в. 2, с. 236–237.
3. *Назарько О. В.*, *Павлов И. В.* Теорема Дуба о преобразовании свободного выбора для деформированных мартингалов. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2010, т. 17, в. 2, с. 239–240.
4. *Long R.* Martingale Spaces and Inequalities. Peking: Peking University Press, 1993.