О Б О З Р Е Н И Е
П Р И К Л А Д Н О Й И П Р О М Ы Ш Л Е Н Н О Й
Т о м 20 **М А Т Е М А Т И К И** **В ы п у с к 4**
2013

А. С. Т и х о м и р о в (Великий Новгород, НовГУ). **О переходных функциях марковского случайного поиска.**

Назовем *пространством оптимизации* измеримое пространство X, снабженное σ-алгеброй его подмножеств $\mathcal{F}$. Пусть целевая функция $f:\ X \mapsto \mathbf{R}$ ограниченна снизу и измерима. Рассмотрим задачу оценки минимального значения целевой функции f с заданной точностью ε (аппроксимация «по функции»). Один из способов решения этой задачи состоит в применении марковских алгоритмов случайного поиска. Следуя [1, с. 116], приведем общую схему моделирования k шагов марковского случайного поиска $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_k$.

Алгоритм 1

Шаг 1. $\xi_0 \leftarrow \pi(\,\cdot\,)$; $n \leftarrow 1$.
Шаг 2. $\eta_n \leftarrow P_n(\xi_{n-1}, \cdot\,)$.
Шаг 3. $\xi_n \leftarrow \begin{cases} \eta_n, & \text{с вероятностью } G_n, \\ \xi_{n-1}, & \text{с вероятностью } 1 - G_n, \end{cases}$

где $G_n = G_n(\eta_n, \xi_{n-1}, f(\eta_n), f(\xi_{n-1}))$.

Шаг 4. Если $n < k$, то $n \leftarrow n+1$ и перейти к шагу 2, иначе STOP.

Здесь $\pi(\,\cdot\,)$ — начальное распределение. Обозначение «$\eta_n \leftarrow P_n(\xi_{n-1}, \cdot\,)$» читается как «получить реализацию случайной величины η_n с распределением $P_n(\xi_{n-1}, \cdot\,)$». Различные правила задания вероятностей G_n и переходных функций P_n приводят к различным вариантам марковских алгоритмов случайного поиска.

Нас интересует попадание поиска в множество $A_\varepsilon = \{x \in X:\ f(x) \leqslant \inf f + \varepsilon\}$. Введем величины $\xi_n^* = \arg\min\{f(\xi_0), f(\xi_1), \ldots, f(\xi_n)\}$. Случайная величина ξ_n^*, попав в множество A_ε, из него больше не выйдет.

Мы рассмотрим одну характеристику скорости сходимости случайного поиска. *Гарантирующее число шагов* случайного поиска $N(f, A_\varepsilon, \gamma)$ определяется как такое минимальное число шагов поиска, при котором достижение множества A_ε гарантировано с вероятностью большей, чем γ. Иначе говоря, $N(f, A_\varepsilon, \gamma) = \min\{n \geqslant 0:\ \mathbf{P}\{\xi_n^* \in A_\varepsilon\} > \gamma\}$.

Пусть $\mathcal{T}$ — множество переходных функций. Для $P, Q \in \mathcal{T}$ положим

$$\rho(P, Q) = \sup_{x \in X} \sup_{A \in \mathcal{F}} |P(x, A) - Q(x, A)|.$$

Оказалось, что можно сузить семейство используемых переходных функций, не теряя свойства оптимальности в смысле минимальности числа шагов поиска, при котором достижение множества A_ε гарантировано с заданной надежностью.

Пусть $\mathcal{V}$ — некоторое подмножество $\mathcal{T}$. Обозначим $\mathcal{Z}(\mathcal{V})$ замыкание в метрике ρ множества всевозможных выпуклых линейных комбинаций переходных функций из $\mathcal{V}$.

Теорема. *Пусть целевая функция* f, $\varepsilon > 0$, $\gamma \in (0, 1)$, *начальное распределение* π *и вероятности* G_n *фиксированы. Тогда* $\min\{N(f, A_\varepsilon, \gamma) : P_n \in \mathcal{Z}(\mathcal{V})\} = \min\{N(f, A_\varepsilon, \gamma) : P_n \in \mathcal{V}\}$.

Таким образом, доказано, что можно сузить семейство используемых переходных функций, не теряя свойства оптимальности в смысле минимальности гарантирующего числа шагов поиска. Полученный теоретический результат имеет ясное прикладное значение, так как обосновывает выбор вида поиска, рекомендованного в ряде работ (как правило, прежнее обоснование было либо эмпирическим, либо основывалось на соображениях «простоты»).

Результаты работы, представленной данным докладом, обобщают результаты работ [2–3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zhigljavsky A.*, *Žilinskas A.* Stochastic Global Optimization. Berlin: Springer, 2008.
2. *Тихомиров А. С.* Об оптимальном марковском монотонном симметричном случайном поиске. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1998, т. 38, № 12, с. 1973–1982.
3. *Тихомиров А. С.* О переходных функциях оптимального марковского поиска. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2012, т. 19, в. 2, с. 224–225.