ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 21 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2014

О. А. Перегудова, Е. В. Филаткина (Ульяновск, УлГУ). **О стабилизации нелинейных систем каскадного вида с кусочно-постоянным управлением.**

В работе с использованием процедуры бэкстеппинга [1] решается задача синтеза нелинейного кусочно-постоянного управления системы каскадного вида

$$\begin{cases} \dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\xi, \\ \dot{\xi} = f_a(\eta,\xi) + g_a(\eta,\xi)u, \end{cases} \tag{1}$$

где $(\eta,\xi) \in R^{n+m}$, $\eta \in R^n$, $\xi \in R^m$, $u \in R^m$, $f(0) = 0$, функции f, g и f_a, g_a непрерывно дифференцируемы.

В работе [2] построен непрерывный стабилизирующий закон управления вида

$$u = g_a(\eta,\xi)^{-1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}[f(\eta) + g(\eta)\xi] - \frac{\partial V}{\partial\eta}g(\eta) - f_a(\eta,\xi) - K[\xi - \varphi(\eta)]\right). \tag{2}$$

Предположим, что управление u в системе (1) является кусочно-постоянным сигналом, $u(t) = u(kT)$, $\forall t \in [kT,(k+1)T)$, $T > 0$, $k \in \mathrm{N}$. Значения вектора состояния системы доступны измерению в моменты времени $t = kT$. Введем обозначения: $u[k] = u(kT)$, $\eta[k] = \eta(kT)$, $\xi[k] = \xi(kT)$.

Дискретная модель системы (1) на основе аппроксимации Эйлера примет вид

$$\eta[k+1] = \eta[k]+T(f(\eta[k])+g(\eta[k])\xi[k]), \quad \xi[k+1] = \xi[k]+T(f_a(\eta[k],\xi[k])+g_a(\eta[k],\xi[k])u[k]). \tag{3}$$

Определение 1. Управление $u[k] = u(\eta[k],\xi[k])$, $u(0,0) = 0$, называется стабилизирующим для системы (3), если нулевое решение $\eta = 0$ $\xi = 0$ системы (3) при данном управлении будет асимптотически устойчиво.

Предположим, что закон $\xi[k] = \varphi(\eta[k])$ с гладкой функцией $\varphi : R^n \to R$, $\varphi(0) = 0$, обеспечивает стабилизацию нулевого положения $\eta = 0$ первого уравнения системы (3).

Введем обозначения:

$$A(\eta) = \int_0^1 (f'(s\eta) + g'(s\eta)\varphi(\eta))ds, \tag{4}$$

$$b(\theta,\eta,z) = \varphi'(\eta + \theta T(f(\eta) + g(\eta)\varphi(\eta) + g(\eta)z)).$$

Теорема 1. *Пусть существуют положительные постоянные* a, δ $(\delta < \gamma)$: $\forall\theta \in [0,1]$ *и* $\forall\eta \in R^n$, $\forall\xi \in R$, *удовлетворяющих условию* $\max(|\eta|,|\xi - \varphi(\eta)|) < \delta$, *имеют место неравенства*

$$\begin{aligned} &\|E + TA(\eta)\| + T\,|g(\eta)| \leqslant \varepsilon < 1, \\ &T\,|b(\theta,\eta,\xi - \varphi(\eta))A(\eta)| + |1 + Tb(\theta,\eta,\xi - \varphi(\eta))g(\eta) - aT| \leqslant \varepsilon < 1. \end{aligned} \tag{5}$$

Тогда управление

$$u[k] = -g_a(\eta[k],\xi[k])^{-1}[f_a(\eta[k],\xi[k]) + a(\xi[k] - \varphi(\eta[k]))] \tag{6}$$

решает задачу о стабилизации системы (3) *с областью притяжения* $\max(|\eta|, |\xi - \varphi(\eta)|) < \delta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для нового вектора состояния (η, z) система (3) примет вид:

$$\begin{aligned}\eta[k+1] &= \eta[k] + T(f(\eta[k]) + g(\eta[k])\varphi(\eta[k])) + Tg(\eta[k])z[k],\\ z[k+1] &= z[k] + \varphi(\eta[k]) - \varphi(\eta[k] + T(f(\eta[k]) + g(\eta[k])\varphi(\eta[k])) + Tg(\eta[k])z[k]) + Tu_d[k].\end{aligned} \tag{7}$$

Учитывая равенства:

$$f(\eta[k]) + g(\eta[k])\varphi(\eta[k]) = \left(\int_0^1 (f'(s\eta[k]) + g'(s\eta[k])\varphi(\eta[k]))ds\right)\eta[k],$$

$$\begin{aligned}&\varphi(\eta[k]) - \varphi(\eta[k] + T(f(\eta[k]) + g(\eta[k])\varphi(\eta[k])) + Tg(\eta[k])z[k])\\ &= -\varphi'(\eta[k] + \theta T(f(\eta[k]) + g(\eta[k])\varphi(\eta[k]) + g(\eta[k])z[k]))T(f(\eta[k])\\ &+g(\eta[k])\varphi(\eta[k]) + g(\eta[k])z[k]),\\ &\theta \in [0,1]\end{aligned}$$

представим систему (7) в следующем виде

$$\begin{aligned}\eta[k+1] &= (E + TA(\eta[k]))\eta[k] + Tg(\eta[k])z[k],\\ z[k+1] &= Tb(\theta,\eta[k],z[k])A(\eta[k])\eta[k] + (1 + Tb(\theta,\eta[k],z[k])g(\eta[k]))z[k] + Tu_d[k].\end{aligned}$$

При управлении (6) эта система примет следующий вид

$$\begin{aligned}\eta[k+1] &= (E + TA(\eta[k]))\eta[k] + Tg(\eta[k])z[k],\\ z[k+1] &= Tb(\theta,\eta[k],z[k])A(\eta[k])\eta[k] + (1 + Tb(\theta,\eta[k],z[k])g(\eta[k]) - aT)z[k].\end{aligned} \tag{8}$$

Возьмем для системы (8) функцию Ляпунова в виде $V(\eta, z) = \max\{|\eta|, |z|\}$.

Рассмотрим поведение функции Ляпунова вдоль решения системы (8) с начальным условием $(\eta_0, z_0) = (\eta_0, \xi_0 - \varphi(\eta_0))$, $|\eta_0| < \delta$, $|\xi_0 - \varphi(\eta_0)| < \delta$.

Обозначим $V[k] = V(\eta[k], z[k])$, тогда, учитывая неравенства

$$\begin{aligned}|\eta[k+1]| &\leqslant (||E + TA(\eta[k])|| + T|g(\eta[k])|)\max\{|\eta[k]|, |z[k]|\},\\ |z[k+1]| &\leqslant (T|b(\theta,\eta[k],z[k])A(\eta[k]| + |1 + Tb(\theta,\eta[k],z[k])g(\eta[k]) - aT|)\max\{|\eta[k]|, |z[k]|\}.\end{aligned}$$

Получим для функции Ляпунова неравенство

$$\begin{aligned}&V[k+1] \leqslant \max\{\|E + TA(\eta[k])\| + T\,|g(\eta[k])|\,,\\ &T\,|b(\theta,\eta[k],z[k])A(\eta[k])| + |1 + Tb(\theta,\eta[k],z[k])g(\eta[k]) - aT|\}V[k].\end{aligned}$$

Отсюда, учитывая (5), получим, что $V[k+1] - V[k] \leqslant -(1-\varepsilon)V[k]$ для любого $k \geqslant 0$. Таким образом, нулевое решение $\eta = 0$, $z = 0$ системы (8) асимптотически устойчиво. Учитывая, что $\varphi(0) = 0$, получим асимптотическую устойчивость нулевого решения $\eta = 0$, $\xi = 0$ системы (3). Теорема доказана.

С использованием теоремы 1 решена задача о построении управления движением многозвенного манипулятора с учетом свойств упругости в соединительных элементах звеньев, описываемого уравнениями

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{N}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{K}(\mathbf{q} - \mathbf{Q}) = 0, \quad \mathbf{B}\ddot{\mathbf{Q}} + \mathbf{K}(\mathbf{Q} - \mathbf{q}) = \tau, \tag{9}$$

где $\mathbf{q}$ — вектор обобщенных координат управляемых звеньев манипулятора, $\mathbf{Q}$ — вектор обобщенных координат управляющих приводов, $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ — матрица инерции звеньев робота, $\mathbf{N}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ — вектор центробежных, кориолисовых и гравитационных сил, $\mathbf{K}$ — матрица жесткости шарниров, $\mathbf{B}$ — матрица инерции приводов, τ — вектор входных сигналов, поступающих на управляющие устройства.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-33082 мол_а_вед) и Минобрнауки России в рамках базовой части (проект 2097).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kokotovic P. V.* The joy of feedback: Nonlinear and adaptive. — IEEE Control Systems Magazine, 1992, 12 p. 7–17.
2. *Sepulchre R.*, *Jankovic M.*, *Kokotovic P. V.* Constructive nonlinear control. Springer: New York, 1997.