ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 21 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2014

Л. П. Артюхина, **Т. И. Колодий** (Волгоград, ВолГУ, НИИГТП). **Оценки максимального правдоподобия параметров модели рассеивания выброса точечного источника в приземном слое атмосферы.**

Целью данной работы является продолжение исследований оценивания последствий аварийных выбросов на основе модели мгновенного точечного источника [3], которая применялась при выполнении работ по оценке риска для здоровья населения, проживающего в зоне влияния промышленных выбросов химически опасных производств [1].

Пусть $\xi(t,r)$ обозначает концентрацию примеси вещества в приземном слое атмосферы в момент времени $t>0$ в точке $r=(x,y,z)\in\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}_+=\mathbf{R}_0^3$, образованную выбросом вещества мощности Q в результате действия точечного источника мгновенной мощности. Считаем, что рассеивание примеси вещества в атмосфере происходит под воздействием процесса диффузии в случайном поле скоростей $\eta_j(t,r)=a_j(t,r)\,dt+b_j(t,r)\,dw_j(t)$, $j=1,2,3$ где $(w_j(t))_{t\geqslant 0}$ — независимые стандартные винеровские процессы, определенные на некотором вероятностном пространстве с фильтрацией $(\Omega,\mathfrak{F},(\mathfrak{F}_t)_{t\geqslant 0},\mathbf{P})$ (см. [5]). В соответствии с общими идеями построения моделей турбулентной диффузии [2], полагаем, что поле $\xi(t,r)$ является решением стохастического параболического уравнения Ито

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}+(\eta,\nabla\xi)+\sigma\xi=\mu\triangle\xi+\frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial\xi}{\partial z},\qquad \xi(0,r)=Q\cdot\delta(r), \tag{1}$$

где δ — дельта функция Дирака, Q — неотрицательная непрерывная функция, непрерывная функция σ определяет возможность изменения концентрации за счет оседания на поверхность тяжелой примеси, перемещения вещества в верхние слои атмосферы или изменения концентрации в результате химических превращений, параметры μ,ν — коэффициенты диффузии.

Модель (1) при определенных условиях может быть представлена в виде стохастического интегро-дифференциального уравнения Вольтерра [4] вида

$$\xi(t,r)=\zeta(t,r)+\int_0^t\int_{\mathbf{R}^3}A(t,s,r,h,\nabla\xi(s,h))\,dh\,ds+\sum_{j=1}^3\int_0^t\int_{\mathbf{R}^3}B_j(t,s,r,h,\nabla\xi(s,h))\,dh\,dw_j(s),$$

где функции ζ, A и B определенным образом выражаются через коэффициенты уравнения (1). Отметим, что в случае степенных моделей скорости ветра и вертикального коэффициента аналитическое решение уравнения турбулентной диффузии найдено в работе [1].

Пусть $0<t_1<t_2<\cdots<t_n$, $r^{(j)}\in\mathbf{R}_0^3$, $j=1,2,\ldots,n$. Плотность совместного распределения $p_\xi(\cdot)$ случайных величин $\xi(t_1,r^{(1)}),\xi(t_2,r^{(2)}),\ldots,\xi(t_n,r^{(n)})$ получены в работе [3]. Предположим, что в результате серии наблюдений в моменты времени t_j в точках $r^{(j)}$, $j=1,2,\ldots,n$ получены величины концентраций $\xi(t_j,r^{(j)})$. Используя

представление (из [3]) для плотностей конечного распределения случайного поля ξ, мы вычисляем оценки максимального правдоподобия для параметров a_j и b_j:

$$\widehat{b}_j = \arg\max_{b_j} p_\xi(\xi(t_1, r^{(1)}), \ldots, \xi(t_n, r^{(n)})); \quad \widehat{a}_j = \arg\max_{a_j} p_\xi(\xi(t_1, r^{(1)}), \ldots, \xi(t_n, r^{(n)})).$$

Теорема. *Если* $\max|t_{j+1} - t_j| \to 0$, *то оценки* $\widehat{a}_j$ *и* $\widehat{b}_j$ *являются сильно состоятельными.*

В докладе излагается способ статистического оценивания коэффициентов модели методом максимального правдоподобия по дискретным наблюдениям концентрации вещества в атмосфере.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Берлянд М. Е.* Прогноз и регулирование загрязнения атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1985, 272 с.
2. *Chow P. L.* Generalized solution of some stochastic P.D.E.'s in turbulent diffusion. — In: Stochastic Processes in Physics Engineering./ Ed. by S. Albeverio, P. Blanchard, M. Hazewinkel, W. Streit. Heidelberg etc.: Springer 1988, p. 63–74.
3. *Колодий Т. И.* Стохастическая модель мгновенного точечного источника. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2008, т. 15, в. 4, с. 668–669.
4. *Колодий Н. А.* Неравества для моментов стохастических интегралов и стохастические уравнения Вольтерра по двупараметическому винеровскому процессу. — Сиб. матем. ж., 2013, т. 54, № 5, с. 1038–1050.
5. *Булинский А. В.*, *Ширяев А. Н.* Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005, 408 с.