ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 21 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2014

И. И. Федик, Л. И. Миронова (Подольск, ПИ филиал МГМУ (МАМИ)). **К вопросу о вычислении термоупругих напряжений в плоском диске с переменными физико-механическими свойствами.**

В ряде случаев при вычислении температурных напряжений в элементах конструкций, подверженных действию высокоградиентных температурных полей, расчеты проводятся по упругим постоянным без учета их температурных зависимостей. С целью проведения анализа влияния температуры на физико- механические свойства материалов приведем расчетную модель термонапряженного состояния плоского диска.

В случае плоского напряженного состояния при радиальном распределении температуры для выделенного элемента тела цилиндрической формы с переменными физико-механическими свойствами, находящегося в равновесии, дифференциальное уравнение, характеризующее осесимметричное термонапряженное состояние, можно записать в виде [1]

$$\frac{d^2\sigma_r}{d\rho^2}+\Big[\frac{3}{\rho}-\frac{d}{d\rho}(\ln E)\Big]\frac{d\sigma_r}{d\rho}+\frac{E}{\rho}\sigma_r\frac{d}{d\rho}\Big(\frac{1-\nu}{E}\Big)+\frac{E}{\rho}\frac{d\varepsilon_t}{d\rho}=0. \qquad (1)$$

Здесь σ_r — радиальные термоупругие напряжения; E — модуль упругости, ε_t — температурная деформация; ρ — радиус кривизны поперечного сечения тела; ν — коэффициент Пуассона.

В этом же случае соотношение температурной деформации в зависимости от среднего значения коэффициента линейного расширения могут быть определены записью $\varepsilon_t=\int\alpha(t)\,dt$. Здесь температура тела меняется от начального $(t_{\text{н}}=20^\circ C)$ до некоторого значения (t) протекающего температурного процесса. Применительно к сплошному длинному цилиндру, свободного от нагрузок на торцах, компоненты тензора напряжений могут быть выражены следующими соотношениями

$$\sigma_r=\frac{E}{1-\nu}\left[\left(1-\frac{i^2}{\rho^2}\right)\frac{1}{1-i^2}\int_i^1\varepsilon_t\rho d\rho+\int_i^\rho\varepsilon_t\rho d\rho\right];$$

$$\sigma_\theta=\frac{E}{1-\nu}\left[\left(1+\frac{i^2}{\rho^2}\right)\frac{1}{1-i^2}\int_i^1\varepsilon_t\rho d\rho+\frac{1}{\rho^2}\int_i^\rho\varepsilon_t\rho d\rho-\varepsilon_t\right];$$

$$\sigma_z=\frac{E}{1-\nu}\left(\frac{2}{1-i^2}\int_i^1\varepsilon_t\rho d\rho-\varepsilon_t\right). \qquad (2)$$

В выражении (2) приняты независимые от температуры характеристики E и ν. Покажем, что с учетом линейной аппроксимации $\alpha(t)$ решение уравнения (1) может быть принято в виде степенного ряда для зависимых от температуры упругих постоянных E_t и ν_t. С этой целью принимаем линейную аппроксимацию $\alpha(t)$ в следующем виде $\overline{\alpha}(t)=\overline{\alpha}(t_i)[1+\overline{\beta}(t-t_i)]$; $\alpha(t)=\alpha(t_i)[1+\beta(t-t_i)]=\overline{\alpha}(2t-20)$; $\beta=(2\overline{\beta})/(1+\overline{\beta}(t_i-20))$.

Для решения приведенных уравнений необходимо знать закон изменения температуры. Такие примеры приведены в литературе [1]. В общем случае температурные зависимости α, E, ν можно описать следующими выражениями

$$\alpha(t) = \alpha_0[1 + \beta'_\alpha(t - t_0) + \beta''_\alpha(t - t_0)^2], \quad \alpha_0 = (t_0);$$
$$E(t) = E_0[1 + \beta'_E(t - t_0) + \beta''_E(t - t_0)^2], \quad E_0 = E(t_0);$$
$$\nu(t) = \nu_0[1 + \beta'_\nu(t - t_0)], \quad \nu_0 = \nu(t_0). \tag{3}$$

Для сплошного диска температурное поле можно аппроксимировать степенной функцией вида

$$t - t_0 = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \rho^{2k}. \tag{4}$$

Здесь N и α_k могут быть определены из сопоставления точного решения краевой задачи теплопроводности с принятой погрешностью аппроксимации. Подставляя выражения (3) и (4) в (1), получим

$$\rho\frac{d^2\sigma_r}{d\rho^2} + \Big(3 - 2\sum_{k=1}^{\infty} p_k\rho^{2k}\Big)\frac{d\sigma_r}{d\rho} - 2\sigma_r\sum_{k=1}^{\infty} q_k\rho^{2k-1} + 2\alpha_0 E_0\alpha_1 \sum_{k=0}^{5N-1} A_0\rho^{2k+1} = 0, \tag{5}$$

где p_k, q_k — коэффициенты аппроксимации, с возрастанием индекса k они быстро убывают. С учетом (5) радиальные и окружные напряжения можно привести к степенному ряду по возрастающим степеням k

$$\sigma_r = \alpha_0 E_0\alpha_1 \sum_{k=0}^{\infty} B_k\rho^{2k}; \quad \sigma_\theta = \alpha_0 E_0\alpha_1 \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\rho^{2k}. \tag{6}$$

Для нахождения коэффициентов B_k достаточно подставить правое уравнение выражения (6) в (5) и сравнить коэффициенты при радиусе ρ с одинаковыми степенями, получая систему линейных уравнений. Таким образом, приведенные уравнения (5) и (6) могут быть использованы в оценке термопрочности цилиндрических тел, подверженных температурному воздействию в пределах 2300К. При этом достаточную точность их решения дают первые два–четыре члена ряда в формулах (5) и (6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ланин А. Г., Федик И. И.* Термопрочность материалов. Подольск, НИИ НПО «Луч», 2005, 309 с.