ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 21 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2014

А. В. Иванов (Москва, МИЭМ НИУ ВШЭ). **Асимптотически оптимальные критерии в задаче различения гипотез о распределении случайного вектора. III.**

В работе, представленной данным докладом, продолжены исследования, представленные автором в [3–5]. Рассмотрим постановку задачи в общем виде [5].

Пусть имеются независимые случайные векторы с независимыми координатами $\overline{X}_t = (X_{t1}, X_{t2}, \ldots, X_{tm}) \in B^m$, $B = \{0, 1\}$, $\mathbf{P}\{X_{tj} = \tau\} = 1/2$, $\tau \in B$, $j = 1, 2, \ldots, m$, $t = 1, 2, \ldots$, а также независимые случайные векторы с независимыми координатами $\overline{\varepsilon}_t = (\varepsilon_{t1}, \varepsilon_{t2}, \ldots, \varepsilon_{tm}) \in B^m$, не зависящие от векторов $\{\overline{X}_t\}_{t=1}^{\infty}$, $\mathbf{P}\{\varepsilon_{tj} = \tau\} = (1 + (-1)^{\tau}\delta_j)/2$, $\tau \in B$, $j = 1, 2, \ldots, m$, $t = 1, 2, \ldots$, $|\delta_j| \leqslant 1$, $\overline{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m)$.

Предположим, что задана произвольная псевдобулева функция $f(\overline{x})\colon B^m \to \mathbf{R}$, $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in B^m$, и рассмотрим последовательность случайных величин $\eta_t = \lambda f(\overline{X}_t \oplus \overline{\varepsilon}_t) + \xi_t$, где ξ_t $(t = 1, 2, \ldots)$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\mathbf{L}(\xi_t) = \mathbf{N}(0, 1)$, не зависящие от векторов $\{\overline{X}_t\}_{t=1}^{\infty}$, $\{\overline{\varepsilon}_t\}_{t=1}^{\infty}$, $\oplus$ — покоординатное сложение векторов по модулю 2.

Пусть $\varphi(z) = (2\pi)^{-1/2} e^{-z^2/2}$, $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(u)\, du$ — значения плотности и функции распределения случайной величины с распределением $\mathbf{N}(0, 1)$ в точке $z \in \mathbf{R}$, $\zeta_p = \Phi^{-1}(p)$ — квантиль указанного распределения уровня p, $p \in (0, 1)$.

Будем предполагать, что наблюдению доступна последовательность независимых случайных векторов вида $(\eta_t, \overline{X}_t) = (\lambda f(\overline{X}_t \oplus \overline{\varepsilon}_t) + \xi_t, \overline{X}_t)$, $t = 1, 2, \ldots$

Распределение вектора $(\eta_t, \overline{X}_t)$ однозначно задается функцией f и параметрами λ, $\overline{\delta}$. Обозначим $H_{f,\lambda,\overline{\delta}}$ гипотезу, задаваемую функцией f и параметрами λ, $\overline{\delta}$. Обозначим $p_{f,\lambda,\overline{\delta}}(z, \overline{x})$, $z \in \mathbf{R}$, плотность распределения вероятностей случайного вектора $(\eta_t, \overline{X}_t)$, определяемую соответствующей гипотезой $H_{f,\lambda,\overline{\delta}}$. Дополнительно введем гипотезу $H^0\colon \lambda = 0$, которая в дальнейшем играет вспомогательную роль.

В работах [3–5] рассматривался «однородный» случай: $\lambda \equiv \lambda^*$, $\delta_j \equiv \delta$, $j = 1, 2, \ldots, m$, таким образом, задача сводилась к различению гипотез $H_{f,\lambda,\delta}$ и H_{f^*,λ,δ^*}. Обзор полученных в этих условиях результатов приведен в [5].

Для случая $f(\overline{x}) = \|\overline{x}\| = \sum_{j=1}^{m} x_j$ случайный вектор $\overline{X}_t \oplus \overline{\varepsilon}_t$ обобщает хорошо известную модель двоичного симметричного канала (ДСК) на многомерный случай, а случайная величина $\lambda\|\overline{X}_t \oplus \overline{\varepsilon}_t\| + \xi_t$ является моделью канала с векторным дискретным шумом и аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ) (подробнее о терминологии см., например, с. 85, 115 в [1]). Здесь же отметим, что близкие по постановкам и методам решения задачи для случая $\mathbf{P}\{\overline{X}_t = \overline{X}\} = 1$, $t = 1, 2, \ldots$, неоднократно рассматривались в литературе (см., например, [2, 6, 7]). Также следует обратить внимание на работу [10], в которой рассмотрены задачи подобного типа.

Далее полагается $f \equiv f^*$, $\lambda \equiv \lambda^*$. В настоящей работе построены асимптотически оптимальные критерии различения гипотез о векторном параметре $\overline{\delta}$. Следствиями доказанных теорем являются некоторые результаты работ [3–5]. Поскольку в данном случае гипотезы $H_{f,\lambda,\overline{\delta}}$ и $H_{f^*,\lambda^*,\overline{\delta}^*}$ представляют собой гипотезы $H_{f,\lambda,\overline{\delta}}$ и $H_{f,\lambda,\overline{\delta}^*}$, далее они и соответствующие им плотности будут обозначаться $H_{\overline{\delta}}$ и $H_{\overline{\delta}^*}$, $p_{\overline{\delta}}(z,\overline{x})$, $p_{\overline{\delta}^*}(z,\overline{x})$.

Следуя классическому подходу, рассмотрим статистику логарифма отношения правдоподобия оптимального критерия различения гипотез $H_{\overline{\delta}}$ и $H_{\overline{\delta}^*}$:

$$L_{\overline{\delta},\overline{\delta}^*} = \ln\left(\prod_{t=1}^{n}\frac{p_{\overline{\delta}^*}(\eta_t,\overline{X}_t)}{p_{\overline{\delta}}(\eta_t,\overline{X}_t)}\right) = \sum_{t=1}^{n}\ln\left(\frac{p_{\overline{\delta}^*}(\eta_t,\overline{X}_t)}{p^0(\eta_t,\overline{X}_t)}\right) - \sum_{t=1}^{n}\ln\left(\frac{p_{\overline{\delta}}(\eta_t,\overline{X}_t)}{p^0(\eta_t,\overline{X}_t)}\right),$$

где $p^0(z,\overline{x})$ обозначена плотность распределения при гипотезе H^0.

В дальнейшем обозначим $\mathbf{L}_{\overline{\delta}}(\cdot)$, $E_{\overline{\delta}}$ распределение и математическое ожидание соответствующей статистики при гипотезе $H_{\overline{\delta}}$, символом $\Rightarrow$ — слабую сходимость вероятностных мер.

Будем считать, что заданы вероятности ошибок критерия первого и второго рода α,β соответственно. Положим $A_{\overline{\delta}}(\overline{X}) = E_{\overline{\delta}}f(\overline{X}\oplus\overline{\varepsilon})$. Далее обозначим $\overline{\mathrm{const}}$ вектор $(c_1,c_2,\ldots,c_m)$, $c_j = \mathrm{const}_j$, $j=1,2,\ldots,m$. Для двух векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ будем говорить, что $\overline{a}=\overline{b}$ тогда и только тогда, когда $a_j=b_j$, $j=1,2,\ldots,m$. В противном случае будем писать $\overline{a}\neq\overline{b}$.

Теорема 1. *Пусть* $n\to\infty$, $\lambda=\lambda(n)\to 0$ *таким образом, что* $\lambda^2 n=\gamma=\mathrm{const}>0$, $\overline{\delta}=\overline{\mathrm{const}}$, $\overline{\delta}^*=\overline{\mathrm{const}}^*$, $\overline{\delta}\neq\overline{\delta}^*$, $b_{\overline{\delta},\overline{\delta}^*}=E^0(A_{\overline{\delta}^*}(\overline{X}_t)-A_{\overline{\delta}}(\overline{X}_t))^2$.

Тогда при гипотезе $H_{\overline{\delta}}$: $\mathbf{L}_{\overline{\delta}}(L_{\overline{\delta},\overline{\delta}^*})\Rightarrow\mathbf{N}(-\gamma b_{\overline{\delta},\overline{\delta}^*}/2;\gamma b_{\overline{\delta},\overline{\delta}^*})$; *при гипотезе* $H_{\overline{\delta}^*}$: $\mathbf{L}_{\overline{\delta}^*}(L_{\overline{\delta},\overline{\delta}^*})\Rightarrow\mathbf{N}(\gamma b_{\overline{\delta},\overline{\delta}^*}/2;\gamma b_{\overline{\delta},\overline{\delta}^*})$. *Минимальный объем выборки для различения указанных гипотез асимптотически равен* $n_{\overline{\delta},\overline{\delta}^*}\sim(\zeta_\alpha+\zeta_\beta)^2/(\lambda^2 b_{\overline{\delta},\overline{\delta}^*})$.

В частности, при $\delta_j=\delta$, $\delta_j{}^*=\delta^*$, $j=1,2,\ldots,m$, $\delta\neq\delta^*$ из теоремы 1 следует теорема 2 в [4], а при $\delta=0$, $\delta^*=1$ и $f(\overline{x})=\|\overline{x}\|=\sum_{j=1}^m x_j$ — теорема 1 в [3].

Представляет интерес важный частный случай $f(\overline{x})=\|\overline{x}\|=\sum_{j=1}^m x_j$, результат для которого сформулируем отдельно.

Теорема 2. *Пусть* $n\to\infty$, $\lambda=\lambda(n)\to 0$ *таким образом, что* $\lambda^2 n=\gamma=\mathrm{const}>0$, $f(\overline{x})=\|\overline{x}\|=\sum_{j=1}^m x_j$ *и* $d_{\overline{\delta},\overline{\delta}^*}=\sum_{j=1}^m(\delta_j{}^*-\delta_j)^2\neq 0$.

Тогда минимальный объем выборки для различения указанных гипотез асимптотически равен $n_{\overline{\delta},\overline{\delta}^*}\sim 4(\zeta_\alpha+\zeta_\beta)^2/(\lambda^2 d_{\overline{\delta},\overline{\delta}^*})$.

В частности, при $\delta=0$, $\delta^*=1$ из теоремы 2 следует теорема 2 в [3].

Далее рассматривается схема серий, в которой $\delta_j\equiv\delta_j(n)\to 0$, $j=1,2,\ldots,m$, при $n\to\infty$, причем по каждой координате имеется своя зависимость.

Пусть $\overline{\chi}=(\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_m)$, $\chi_j=\mathrm{const}_j$, $j=1,2,\ldots,m$. Положим $\overline{\delta}=\tau\overline{\chi}$, где $\tau=\|\overline{\delta}\|=(\sum_{j=1}^m\delta_j^2)^{1/2}$. Вектор $\overline{\chi}$ определяет направление сближения вектора $\overline{\delta}$ с началом координат, а величина τ — скорость сближения.

Введем следующие обозначения:

$$\pi_{\overline{\delta}}(\overline{u})=\pi_{\overline{0}}(\overline{u})\prod_{j=1}^m(1+(-1)^{u_j}\delta_j),\quad \overline{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_m)\in B^m,\quad \pi_{\overline{0}}(\overline{u})=2^{-m}.$$

Положим

$$\overline{\dot{\pi}}_{\overline{0}}(\overline{u})=\left(\frac{\partial\pi_{\overline{\delta}}(\overline{u})}{\partial\delta_1}|_{\overline{\delta}=\overline{0}},\ldots,\ \frac{\partial\pi_{\overline{\delta}}(\overline{u})}{\partial\delta_m}|_{\overline{\delta}=\overline{0}}\right)^T,\quad \ddot{\pi}_{\overline{0}}(\overline{u})=\left\|\frac{\partial^2\pi_{\overline{\delta}}(\overline{u})}{\partial\delta_i\partial\delta_j}|_{\overline{\delta}=\overline{0}}\right\|_{i,j=1}^m,$$

где $\overline{0}=(0,0,\ldots,0)$ — нулевой вектор размерности m, T — транспонирование,

$$\overline{h}(\overline{u})=\frac{\overline{\dot{\pi}}_{\overline{0}}(\overline{u})}{\pi_{\overline{0}}(\overline{u})},\quad h_{\overline{\delta}}(\overline{u})=\overline{\delta}\,\overline{h}(\overline{u}),\quad H(\overline{u})=\frac{\ddot{\pi}_{\overline{0}}(\overline{u})}{\pi_{\overline{0}}(\overline{u})},\quad H_{\overline{\delta}}(\overline{u})=\overline{\delta}\,H(\overline{u})\overline{\delta}^T.$$

Теорема 3. *Пусть* $n\to\infty$, $\lambda=\lambda(n)\to 0$ *таким образом, что* $\lambda^4 n=\gamma=\mathrm{const}>0$, $\overline{\delta}=\rho\lambda\overline{\chi}$, $\overline{\delta}^*=\rho^*\lambda\overline{\chi}$, $\rho=\mathrm{const}$, $\rho^*=\mathrm{const}^*$, $\rho\neq\rho^*$, $q_{\overline{\chi}}(\overline{x})=E^0[f(\overline{x}\oplus\overline{\varepsilon})h_{\overline{\chi}}(\overline{\varepsilon})]$, $Q_{\overline{\chi}}=E^0q_{\overline{\chi}}^2(\overline{X})$.

Тогда при гипотезе $H_\rho:\ \mathbf{L}_\rho(L_{\rho,\rho^*}) \Rightarrow \mathbf{N}(-\gamma(\rho-\rho^*)^2 Q_{\overline{\chi}}/2; \gamma(\rho-\rho^*)^2 Q_{\overline{\chi}})$; *при гипотезе* $H_{\rho^*}:\ \mathbf{L}_{\rho^*}(L_{\rho,\rho^*}) \Rightarrow \mathbf{N}(\gamma(\rho-\rho^*)^2 Q_{\overline{\chi}}/2; \gamma(\rho-\rho^*)^2 Q_{\overline{\chi}})$. *Минимальный объем выборки для различения указанных гипотез асимптотически равен* $n_{\rho,\rho^*} \sim (\zeta_\alpha + \zeta_\beta)^2/(\lambda^4(\rho-\rho^*)^2 Q_{\overline{\chi}})$.

При доказательстве приведенных утверждений существенно использовались результаты работ [8, 9].

В качестве дальнейших исследований было бы интересно рассмотреть схему, в которой $\overline{\delta} = \rho\lambda\overline{\chi}$, $\overline{\delta}^* = \rho^*\lambda\overline{\chi}^*$, $\rho \neq \rho^*$, $\overline{\chi} \neq \overline{\chi}^*$, т. е. ситуацию, когда сближение с началом координат происходит с разной скоростью и по разным направлениям. Также определенный интерес представляет исследование случая, в котором вместо операции $\oplus$ используется другая операция.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вернер М.* Основы кодирования (серия «Мир программирования»). М.: Техносфера, 2004, 288 с.
2. *Иванов А. В.* Оптимальный критерий различения n нормальных гипотез. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2001, т. 8, в. 2, с. 762–763.
3. *Иванов А. В.* Асимптотически наиболее мощный критерий различения гипотез о распределении случайного вектора. — Десятая общероссийская научная конференция «Математика и безопасность информационных технологий (МаБИТ-2011)». Материалы секции «Математические проблемы информационной безопасности». М.: МАКС-ПРЕСС, 2012, с. 93–97.
4. *Иванов А. В.* Асимптотически оптимальные критерии в задаче различения гипотез о распределении случайного вектора. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2013, т. 20, в. 2, с. 139–141.
5. *Иванов А. В.* Асимптотически оптимальные критерии в задаче различения гипотез о распределении случайного вектора. II. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2013, т. 20, в. 4, с. 548–550.
6. *Пазизин С. В.* Обнаружение и прием последовательности сигналов, искаженных случайной помехой и независимым шумом. — Проблемы передачи информации, 1998, т. 34, № 1, с. 46–55.
7. *Пазизин С. В.* Вероятности правильного декодирования для канала с аддитивным нормальным шумом и двоичного симметричного канала при случайном выборе кодовых слов. — Дискретн. матем., 2000, т. 12, в. 2, с. 93–98.
8. *Русас Дж.* Контигуальность вероятностных мер. М.: Мир, 1975, 256 с.
9. *Чибисов Д. М.* Теорема о допустимых критериях и ее применение к одной асимптотической задаче проверки гипотез. — Теория вероятн. и ее примен., 1967, т. XXI, в. 1, с. 96–111.
10. *Arbekov I. M.* Asymptotically Optimum Detection of a Weak Signal Sequence with Random Time Delays. — IEEE Transactions on Information Theory, 1995, v. 41, № 4, p. 1169–1174.