ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 21 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2014

Е. В. К у т ы р ё в а (Москва, ТВП). **О распределении числа треугольников Паскаля над произвольным конечным полем.**

Рассмотрим аналог треугольника Паскаля T_s, состоящий из s строк элементов произвольного конечного поля $\mathbf{GF}(q)$, $q = p^n$ (см. [1]). Число s будем называть размером треугольника T_s. В i-й строке $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_i^{(i)})$, $i = 1, 2, \ldots, s-1$, рассматриваемого треугольника j-й элемент, $j = 1, 2, \ldots, i$, определяется с помощью j-го и $(j+1)$-го элементов $(i+1)$-й строки $(x_1^{(i+1)}, x_2^{(i+1)}, \ldots, x_{i+1}^{(i+1)})$ следующим образом:

$$x_j^{(i)} = \alpha x_j^{(i+1)} + \beta x_{j+1}^{(i+1)},$$

$j = 1, 2, \ldots, i$, где $\alpha, \beta \in \mathbf{GF}(q)^*$, $\mathbf{GF}(q)^*$ — мультипликативная группа поля $\mathbf{GF}(q)$.

Таким образом, задав значения $(x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, \ldots, x_s^{(s)})$ всех s элементов s-й строки рассматриваемого треугольника T_s, мы однозначно вычисляем оставшиеся $\binom{s}{2}$ элементов. Число ненулевых элементов в треугольнике T_s обозначим через z. Через s_0 обозначим размер максимального треугольника T_{s_0}, целиком состоящего из нулевых элементов и содержащегося в треугольнике T_s.

Пусть s_0-я строка треугольника T_{s_0} состоит из элементов $x_{j_1}^{(s-r)}, \ldots, x_{j_2-r}^{(s-r)}$ треугольника T_s для некоторых значений $r \geqslant 1$, $j_1 \geqslant 1$, $j_1 + r \leqslant j_2 \leqslant s$. Рассмотрим далее трапецию B из r строк, верхняя строка которой состоит из элементов $x_{j_1}^{(s-r+1)}, \ldots, x_{j_2-r+1}^{(s-r+1)}$ строки с номером $(s-r+1)$ треугольника T_s, а нижняя — из элементов $x_{j_1}^{(s)}, \ldots, x_{j_2}^{(s)}$ строки с номером s треугольника T_s. Если представить треугольник T_s на плоскости таким образом, что его s-я строка расположена горизонтально и является нижней, то строки рассматриваемой трапеции B являются подстроками всех строк треугольника T_s, расположенных под нулевым треугольником T_{s_0}. Нумерацию строк трапеции B будем вести, начиная с 0 (верхняя строка имеет номер 0).

Разобьем строки трапеции B на $\lceil \log_p r \rceil + 1$ групп по $(p-1)p^{j-1}$ строк, где j — номер группы, $j \in 1, 2, \ldots, \lceil \log_p r \rceil$. Группа с номером 0 состоит из 0-й строки трапеции B.

Пусть порядок элемента $-\alpha\beta^{-1}$ равен c.

В работах [1, 2] показано, что строки трапеции B периодичны, период строки трапеции B из группы с номером j равен cp^j, $j \in 0, 1, \ldots, \lceil \log_p r \rceil$.

В [1] показано, что для любого фиксированного $v \in \mathbf{R}_+$ если число z ненулевых элементов в треугольнике T_s над полем $\mathbf{GF}(q)$, удовлетворяет условию $z \leqslant vs$, то существуют зависящее от v число S, монотонная последовательность рациональных чисел

$$0 = v_0 < v_1 < v_2 < \cdots$$

и такие неотрицательные константы ε_i, $i \geqslant 0$, что для $s > S$ имеем: $M(s, z) = 0$, если $z \notin \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} (v_i s - \varepsilon_i, v_i s + \varepsilon_i)$.

Данный результат является обобщением результата для случая $q=2$ из работы [2].

Вообще говоря, треугольник T_{s_0} окружен тремя трапециями. Для фиксированного значения i число v_i является суммой по всем строкам для всех трех трапеций долей ненулевых элементов на периоде соответствующей строки.

Рассмотрим треугольники одинакового размера s $T_s^{(1)}$ над простым полем $\mathbf{GF}(p)$ и $T_s^{(2)}$ над полем $\mathbf{GF}(p^n)$. Пусть для числа ненулевых элементов z_1 (z_2) в треугольнике $T_s^{(1)}$ ($T_s^{(2)}$) выполняется $\lim\limits_{s\to\infty}\frac{z_1}{s}=k_1$ ($\lim\limits_{s\to\infty}\frac{z_2}{s}=k_2$). Тогда, как это упомянуто выше, для треугольников $T_s^{(1)}$ и $T_s^{(2)}$ существуют монотонные последовательности

$$0=v_0^{(1)}<v_1^{(1)}<v_2^{(1)}<\cdots$$

и

$$0=v_0^{(2)}<v_1^{(2)}<v_2^{(2)}<\cdots$$

соответственно, такие, что возможные количества ненулевых элементов в треугольниках сосредоточены вблизи точек $v_i^{(1)}s$ или $v_i^{(2)}s$ соответственно.

Далее последовательность $v_i^{(j)}s$, $i\geqslant 0$ будем называть последовательностью точек привязки распределения числа треугольников Паскаля $T_s^{(j)}$.

Пусть без ограничения общности $z_1<z_2$ и $v_{j-1}^{(1)}=k_1$. Тогда верна

Теорема 1. *Первые j членов последовательности точек привязки распределения числа треугольников Паскаля над полем $\mathbf{GF}(p^n)$ полностью совпадают с первыми j членами последовательности точек привязки распределения числа треугольников Паскаля над простым полем $\mathbf{GF}(p)$,*

$$v_i^{(1)}=v_i^{(2)}, i=0,1,\ldots,j-1.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кутырёва Е. В.* О числе ненулевых элементов треугольника Паскаля над конечным полем. — В сб.: Математика и безопасность информационных технологий. Материалы конференции. М.: МГУ, 2004.
2. *Малышев Ф. М., Кутырева Е. В.* Об одном свойстве булевых аналогов треугольника Паскаля. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2004, т. 11, в. 2, с. 245–246.