

**А. А. Серов** (Москва, МИАН). **Распределение и моменты числа занятых и посещенных ячеек в одной схеме последовательного размещения частиц по ячейкам.**

Изучается схема последовательного равновероятного размещения частиц по слоям ячеек, каждый из которых состоит из  $N$  ячеек, с объединением частиц, попадающих в одну и ту же ячейку.

На первом этапе случайно, независимо и равновероятно происходит размещение  $\phi_0 = n < N$  частиц по  $\eta_0 = N$  ячейкам. Частицы, попадающие в одну и ту же ячейку, объединяются в одну новую частицу; при этом получается случайное число  $\phi_1$  объединенных частиц (равное числу ячеек, занятых исходными частицами). Пусть  $\psi_1$  — количество занятых ячеек после завершения первого этапа, очевидно,  $\phi_1 = \psi_1$ ; занятые ячейки считаются далее помеченными. В общем случае на  $(k + 1)$ -м этапе  $\phi_k$  объединенных частиц, находящихся в  $N$  ячейках, независимо и равновероятно размещаются по  $N$  ячейкам (из них  $\eta_k = N - \psi_k$  пусты); частицы, попадающие в одну и ту же ячейку, объединяются, и каждая ячейка, в которую попали частицы, помечается. Пусть  $\phi_{k+1}$  — число объединенных частиц,  $\psi_{k+1}$  — число помеченных ячеек. При сделанных предположениях последовательность  $\{\phi_0, \eta_0\}, \{\phi_1, \eta_1\}, \dots$  образует однородную цепь Маркова с невозрастающими траекториями.

Для такой схемы построены цепи Маркова, позволяющие проводить точный расчет ряда характеристик случайных величин  $\phi_k, \psi_k, k \in \{1, 2, \dots\}$ .

**Утверждение 1.** Пусть на каждом из  $k, k \in \{1, 2, \dots\}$ , этапов размещения  $\phi_k$  частиц по  $N$  ячейкам происходит независимо и равновероятно,  $\phi_0 = n$ , тогда  $\mathbf{M} \phi_k^r = \sum_{j=1}^n j^r p_j^{(k)}$ , где  $p_j^{(k)} = a_{n,j}$  ( $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) — элемент  $k$ -й степени нижнетреугольной матрицы  $P = \|p_{i,j}\|_{i,j=1}^n$ ,  $p_{j,j} = \prod_{i=0}^{j-1} (1 - l/j)$ ,  $p_{i,j} = \binom{N}{j} (j/N)^i \sum_{l=0}^j (-1)^l \binom{j}{l} (1 - l/j)^i$ ,  $(P)^k = \|a_{i,j}\|_{i,j=1}^n$ .

**Утверждение 2.** Математическое ожидание и дисперсия числа помеченных ячеек имеют вид

$$\mathbf{M} \psi_k = N - \sum_{s=0}^n \sum_{w=0}^N p_{\{s,w\}}^{(k)} w,$$

$$\mathbf{D} \psi_k = \sum_{s=0}^n \sum_{w=0}^N p_{\{s,w\}}^{(k)} (1 - p_{\{s,w\}}^{(k)}) w^2 - 2 \sum_{m,s=0}^n \sum_{\substack{u,w=0 \\ \{m,u\} \neq \{s,w\}}}^N p_{\{m,u\}}^{(k)} p_{\{s,w\}}^{(k)} u w,$$

где  $p_{\{m,u\}}^{(k)}, p_{\{s,w\}}^{(k)}$  — элементы  $\{m, u\}$ -го и  $\{s, w\}$ -го столбцов соответственно  $\{n, N\}$  строки  $k$ -й степени нижнетреугольной матрицы  $P^* = \|p_{\{m,u\},\{s,w\}}\|_{m,s \in \{0,1,\dots,n\}, u,w \in \{0,1,\dots,N\}}$ ,  $p_{\{m,u\},\{s,w\}} = \binom{u}{r} \binom{N-u}{s-r} \sum_{l=0}^r \sum_{p=0}^{s-r} (-1)^{l+p} \binom{r}{l} \binom{s-r}{p} ((s-l-p)/N)^m$ .

Работа поддержана РФФИ, проект № 14-01-00318.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Случайные размещения. М.: Наука, 1976, 224 с.
2. Flajolet P., Odlyzko A. M. Random Mapping Statistics. — Lect. Notes Comp. Sci., 1990, v. 434, p. 329–354.
3. Зубков А. М., Шибанов О. К. Время до объединения всех частиц при равновероятных размещениях по последовательности слоев ячеек. — Матем. заметки, 2009, т. 85, в. 3, с. 373–381.
4. McSweeney J. K., Pittel B. G. Expected coalescence time for a nonuniform allocation process. — Adv. Appl. Probab., 2008, v. 40, № 4, p. 919–1230.