

А. А. Серов (Москва, МИАН). **Распределение и моменты числа занятых и посещенных ячеек в одной схеме последовательного размещения частиц по ячейкам.**

Изучается схема последовательного равновероятного размещения частиц по слоям ячеек, каждый из которых состоит из N ячеек, с объединением частиц, попадающих в одну и ту же ячейку.

На первом этапе случайно, независимо и равновероятно происходит размещение $\phi_0 = n < N$ частиц по $\eta_0 = N$ ячейкам. Частицы, попадающие в одну и ту же ячейку, объединяются в одну новую частицу; при этом получается случайное число ϕ_1 объединенных частиц (равное числу ячеек, занятых исходными частицами). Пусть ψ_1 — количество занятых ячеек после завершения первого этапа, очевидно, $\phi_1 = \psi_1$; занятые ячейки считаются далее помеченными. В общем случае на $(k + 1)$ -м этапе ϕ_k объединенных частиц, находящихся в N ячейках, независимо и равновероятно размещаются по N ячейкам (из них $\eta_k = N - \psi_k$ пусты); частицы, попадающие в одну и ту же ячейку, объединяются, и каждая ячейка, в которую попали частицы, помечается. Пусть ϕ_{k+1} — число объединенных частиц, ψ_{k+1} — число помеченных ячеек. При сделанных предположениях последовательность $\{\phi_0, \eta_0\}, \{\phi_1, \eta_1\}, \dots$ образует однородную цепь Маркова с невозрастающими траекториями.

Для такой схемы построены цепи Маркова, позволяющие проводить точный расчет ряда характеристик случайных величин $\phi_k, \psi_k, k \in \{1, 2, \dots\}$.

Утверждение 1. Пусть на каждом из $k, k \in \{1, 2, \dots\}$, этапов размещения ϕ_k частиц по N ячейкам происходит независимо и равновероятно, $\phi_0 = n$, тогда $\mathbf{M} \phi_k^r = \sum_{j=1}^n j^r p_j^{(k)}$, где $p_j^{(k)} = a_{n,j}$ ($j \in \{1, 2, \dots, n\}$) — элемент k -й степени нижнетреугольной матрицы $P = \|p_{i,j}\|_{i,j=1}^n$, $p_{j,j} = \prod_{i=0}^{j-1} (1 - i/j)$, $p_{i,j} = \binom{N}{j} (j/N)^i \sum_{l=0}^j (-1)^l \binom{j}{l} (1 - l/j)^i$, $(P)^k = \|a_{i,j}\|_{i,j=1}^n$.

Утверждение 2. Математическое ожидание и дисперсия числа помеченных ячеек имеют вид

$$\mathbf{M} \psi_k = N - \sum_{s=0}^n \sum_{w=0}^N p_{\{s,w\}}^{(k)} w,$$

$$\mathbf{D} \psi_k = \sum_{s=0}^n \sum_{w=0}^N p_{\{s,w\}}^{(k)} (1 - p_{\{s,w\}}^{(k)}) w^2 - 2 \sum_{m,s=0}^n \sum_{\substack{u,w=0 \\ \{m,u\} \neq \{s,w\}}}^N p_{\{m,u\}}^{(k)} p_{\{s,w\}}^{(k)} u w,$$

где $p_{\{m,u\}}^{(k)}, p_{\{s,w\}}^{(k)}$ — элементы $\{m, u\}$ -го и $\{s, w\}$ -го столбцов соответственно $\{n, N\}$ строки k -й степени нижнетреугольной матрицы $P^* = \|p_{\{m,u\},\{s,w\}}\|_{m,s \in \{0,1,\dots,n\}, u,w \in \{0,1,\dots,N\}}$, $p_{\{m,u\},\{s,w\}} = \binom{u}{r} \binom{N-u}{s-r} \sum_{l=0}^r \sum_{p=0}^{s-r} (-1)^{l+p} \binom{r}{l} \binom{s-r}{p} ((s-l-p)/N)^m$.

Работа поддержана РФФИ, проект № 14-01-00318.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Случайные размещения. М.: Наука, 1976, 224 с.
2. Flajolet P., Odlyzko A. M. Random Mapping Statistics. — Lect. Notes Comp. Sci., 1990, v. 434, p. 329–354.
3. Зубков А. М., Шибанов О. К. Время до объединения всех частиц при равновероятных размещениях по последовательности слоев ячеек. — Матем. заметки, 2009, т. 85, в. 3, с. 373–381.
4. McSweeney J. K., Pittel B. G. Expected coalescence time for a nonuniform allocation process. — Adv. Appl. Probab., 2008, v. 40, № 4, p. 919–1230.