ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 21 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2014

М. В. Половинкина (Воронеж, ВГУИТ). **К вопросу о весовых функциональных пространствах.**

Символом $\mathbf{R}_N^+$ мы будем обозначать часть евклидова пространства точек $\mathbf{R}_N^+ = \{x = (x', x''),\ x' = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x'' = (x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_N),\ x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_n > 0\}$.

Обозначим $C_{ev}^l(\mathbf{R}_N^+)$ линейное пространство функций, обладающих следующими свойствами.

1. Каждая функция $\varphi \in C_{ev}^l(\mathbf{R}_N^+)$ непрерывна вместе со всеми своими частными производными до порядка l включительно в $\mathbf{R}_N^+$. Если функция φ имеет в $\mathbf{R}_N^+$ непрерывные частные производные любого порядка, то будем полагать $l = \infty$.

2. При четном продолжении по переменным x' функции $\varphi \in C_{ev}^l(\mathbf{R}_N^+)$ не теряют гладкости, оставаясь в классе $C^l(\mathbf{R}_N)$.

Обозначим $C_{ev,0}^l(\mathbf{R}_N^+)$ линейное пространство функций $\varphi \in C_{ev}^l(\mathbf{R}_N^+)$, обращающихся в ноль вне некоторой (своей для каждой функции) s-внутренней подобласти $\mathbf{R}_N^+$ (подробнее см. [4]); $\mathcal{S}_{ev}$ — линейное пространство функций $\varphi(x) \in C_{ev}^\infty(\mathbf{R}_N^+)$, убывающих при $|x| \to \infty$ вместе со своими производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$; $\mathcal{S}'_{ev}$ — пространство, сопряженное к $\mathcal{S}_{ev}$.

Смешанный обобщенный сдвиг определим формулой

$$f \to (T^y f)(x) = \prod_{i=1}^n T_{x_i}^{y_i} f(x', x'' - y''),$$

где каждый из обобщенных сдвигов $T_{x_i}^{y_i}$ определен по формуле (см. [3])

$$(T_{x_i}^{y_i} f)(x) = \frac{\Gamma((\gamma_i+1)/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\gamma_i/2)} \times \int_0^\pi f\big(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, \sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos\alpha}, x_{i+1}, \ldots, x_N\big) \sin^{\gamma_i - 1}\alpha\, d\alpha,$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, а произведение $\prod_{k=1}^n T_{x_k}^{y_k}$ понимается как суперпозиция операторов.

Положительную функцию k, заданную в $\mathbf{R}_N^+$, будем называть *умеренно растущей γ-весовой функцией*, если существуют такие положительные постоянные C и $\aleph$, что

$$T_\xi^\eta k(\xi) \leqslant (1 + C|\xi|)^\aleph k(\eta); \quad \xi, \eta \in \mathbf{R}_N^+.$$

Множество всех таких функций k обозначим $\mathcal{K}$.

Пусть $k \in \mathcal{K}$, $1 \leqslant p < \infty$. Обозначим $\mathcal{B}_{p,k}^\gamma$ множество всех таких распределений $u \in \mathcal{S}'_{ev}$, что $\widehat{u}$ — функция и

$$\|u\|_{p,k,\gamma} = \left(\int_{\mathbf{R}_N^+} |k(\xi)\widehat{u}(\xi)|^p (x')^\gamma\, dx \right)^{1/p} < \infty,$$

где $\widehat{u}$ — смешанное преобразование Фурье–Бесселя (см. [4]).

Теорема. *При* $k_2(\xi) \leqslant Mk_1(\xi)$, $M > 0$, $\xi \in \mathbf{R}_N^+$, *имеют место непрерывные вложения* $\mathcal{S}_{ev} \subset \mathcal{B}_{p,k_1}^{\gamma} \subset \mathcal{B}_{p,k_2}^{\gamma}$. *Кроме того, пространство* $C_{ev,0}^{\infty}$ *плотно в* $\mathcal{B}_{p,k}^{\gamma}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 2. М. : Мир, 1986, 456 с.
2. *Киприянов И. А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука, 1997, 199 с.
3. *Левитан Б. М.* Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя. — Успехи матем. наук, 1951, т. 6, № 2, с. 102–143.
4. *Ляхов Л. Н.* B-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с B-потенциальными ядрами. Липецк: ЛГПУ, 2007, 232 с.