ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 21 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2014

Ю. Н. Горелов, М. В. Морозова, В. Е. Юрин (Самара, ИПУСС РАН, СамГУ). **Об одной схеме последовательных приближений при синтезе оптимального управления для квазилинейных систем.**

Рассматривается управляемая квазилинейная система

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), \tag{1}$$

где $\mathbf{x}$ — вектор переменных состояния, $\mathbf{u}$ — вектор управляющих параметров, A и B — матрицы соответствующих размерностей, для которых выполняются условия полной управляемости, а $\mathbf{F}(t, \mathbf{x})$ — некоторая заданная вектор-функция. Начальное и конечное состояния системы (1):

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f, \tag{2}$$

где $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{x}_f$ — заданные векторы, а моменты времени t_0 и t_f фиксированы. Решается задача оптимального управления для минимизируемого функционала $J(\mathbf{u})$ типа нормы в L_q $(1 \leqslant q \leqslant \infty)$ для $\mathbf{u}[t_0, t_f]$ [1], которая непосредственно связана с задачей оптимальной переориентации космического аппарата при перенацеливании его оптико-электронной аппаратуры зондирования [2]. Для решения этой задачи в [3, 4] ранее был рассмотрен метод синтеза оптимального управления, для которого здесь предложена соответствующая модификация, и установлены необходимые и достаточные условия сходимости.

Как и в [3, 4], в модифицированном методе последовательных приближений вначале находится решение задачи оптимального управления для (1), (2) при $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) = 0$:

$$\frac{d\mathbf{x}^{(0)}}{dt} = A\mathbf{x}^{(0)} + B\mathbf{u}^{(0)}(t), \quad \mathbf{x}^{(0)}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}^{(0)}(t_f) = \mathbf{x}_f,$$

где $\mathbf{u}^{(0)}(t)$ — оптимальное управление, для которого $J(\mathbf{u}) \to \min$. Полученное решение принимается в качестве начального приближения для вычисления нелинейности в (1) в виде $\widetilde{\mathbf{F}}_0(t) = \mathbf{F}(t, x^{(0)}(t))$, а пара $u^{(0)}(t)$, $x^{(0)}(t)$ далее используется для решения начальной задачи

$$\frac{d\mathbf{x}_\infty^{(0)}}{dt} = A\mathbf{x}_\infty^{(0)} + B\mathbf{u}^{(0)}(t) + \mathbf{F}(t, x_\infty^{(0)}), \quad \mathbf{x}_\infty^{(0)}(t_0) = \mathbf{x}_0, \tag{3}$$

где $\mathbf{x}_\infty^{(0)}(t) = \lim_{i\to\infty} \mathbf{x}_i^{(0)}(t)$, $\mathbf{x}_0^{(0)}(t) = \mathbf{x}^{(0)}(t)$. Последовательные приближения вычисляются методом Пикара [5] посредством решения серии начальных задач:

$$\frac{d\mathbf{x}_i^{(0)}}{dt} = A\mathbf{x}_{i-1}^{(0)} + B\mathbf{u}^{(0)}(t) + \mathbf{F}(t, \mathbf{x}_{i-1}^{(0)}), \quad \mathbf{x}_i^{(0)}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

В общем случае при этом будет получено $\mathbf{x}_\infty^{(0)}(t_f) \neq \mathbf{x}_f$, поэтому для построения первого приближения к искомому решению задачи оптимального управления для (1),

(2) следует скорректировать $\mathbf{u}^{(0)}(t)$ так, чтобы выполнялось и конечное условие (2). В связи с этим для вычисления нелинейности в (1) далее следует принять решение (3) $\mathbf{x}_\infty^{(0)}(t)$ или какое-либо подходящее (по точности) решение (4) $\mathbf{x}_{i_0}^{(0)}(t)$ (для $i_0 \geqslant 1$), а затем решить задачу оптимального управления (для того же функционала $J(\mathbf{u})$), которая в [4] рассматривалась как опорная задача управления, а именно:

$$\frac{d\mathbf{x}^{(1)}}{dt} = A\mathbf{x}^{(1)} + B\mathbf{u}^{(1)}(t) + \mathbf{F}(t, \mathbf{x}_\infty^{(0)}(t)), \quad \mathbf{x}^{(1)}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}^{(1)}(t_f) = \mathbf{x}_f, \tag{5}$$

где $\mathbf{u}^{(1)}(t)$ — оптимальное управление.

Полученное решение задачи (5) в виде пары $\mathbf{x}^{(1)}(t)$, $\mathbf{u}^{(1)}(t)$ является следующим (первым) приближением для задачи оптимального управления системой (1), (2), с учетом которого далее решаются задачи, аналогичные (4) и (5), т. е. находятся $\mathbf{x}_\infty^{(1)}(t)$, пара $\mathbf{u}^{(2)}(t)$ и $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ и т. д. По завершении $(k-1)$-го шага будет получена пара $\mathbf{u}^{(k-1)}(t)$, $\mathbf{x}^{(k-1)}(t)$, где $\mathbf{x}^{(k-1)}(t_0) = \mathbf{x}_0$ и $\mathbf{x}^{(k-1)}(t_f) = \mathbf{x}_f$. Соответственно, на k-м шаге вначале будет найдено решение $\mathbf{x}_\infty^{(k-1)}(t)$ (или $\mathbf{x}_{i_0}^{(k-1)}(t)$, $i_0 \geqslant 1$), для которого $\mathbf{x}_\infty^{(k-1)}(t_0) = \mathbf{x}_0$, но в общем случае $\mathbf{x}_\infty^{(k-1)}(t_f) \neq \mathbf{x}_f$, а затем для $\widetilde{\mathbf{F}}_{k-1}(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}_\infty^{(k-1)}(t))$ будет решаться опорная задача управления (ее решение будет k-м приближением к решению задачи оптимального управления для задачи (1), (2)):

$$\frac{d\mathbf{x}^{(k)}}{dt} = A\mathbf{x}^{(k)} + B\mathbf{u}^{(k)}(t) + \mathbf{F}(t, \mathbf{x}_\infty^{(k-1)}(t)), \quad \mathbf{x}^{(k)}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}^{(k)}(t_f) = \mathbf{x}_f,$$

где $\mathbf{u}^{(k)}(t)$ — оптимальное управление. Вариация $\delta\mathbf{x}^{(k)}(t) = \mathbf{x}^{(k)}(t) - \mathbf{x}_\infty^{(k-1)}(t)$ удовлетворяет (с точностью до малых высшего порядка) следующему уравнению:

$$\frac{d\,\delta\mathbf{x}^{(k)}}{dt} = A\delta\mathbf{x}^{(k)} + B\delta\mathbf{u}^{(k)}(t), \tag{6}$$

где $\delta\mathbf{x}^{(k)}(t_0) = 0$, $\delta\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}^{(k-1)}$ есть корректирующее управление, при помощи которого обеспечивается выполнение условия $\delta\mathbf{x}^{(k)}(t_f) = \mathbf{x}_f - \mathbf{x}_\infty^{(k-1)}(t_f)$. Решая соответствующую задачу управления для (6) (например, для функционала типа нормы в L_2), получим

$$\delta\mathbf{u}^{(k)}(t) = B^T\Phi^T(t_f, t)W^{-1}(t_f, t_0)\delta\mathbf{x}^{(k)}(t_f), \tag{7}$$

где $\Phi(t,\tau)$ — переходная матрица для системы (6), а $W(t_f, t_0)$ — грамиан управляемости: $W(t_f, t_0) = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f,\tau)BB^T\Phi^T(t_f,\tau)\,d\tau$. Отметим, что общее решение (6) имеет вид

$$\delta\mathbf{x}^{(k)}(t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f,\tau)B\delta\mathbf{u}^{(k)}(\tau)\,d\tau, \tag{8}$$

которое подстановкой (7) обращается в тождество.

При $k \to \infty$ имеет место $\mathbf{x}_\infty^{(k-1)}(t) \to \mathbf{x}_\infty^{(\infty)}(t)$, где $\mathbf{x}_\infty^{(\infty)}(t)$ — решение задачи Коши

$$\frac{d\mathbf{x}_\infty^{(\infty)}}{dt} = A\mathbf{x}_\infty^{(\infty)} + B\mathbf{u}^{(\infty)}(t) + \mathbf{F}(t, \mathbf{x}_\infty^{(\infty)}), \quad \mathbf{x}_\infty^{(\infty)}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

для которого выполняется условие $\mathbf{x}_\infty^{(\infty)}(t_f) = \mathbf{x}_f$, а $\mathbf{u}^{(\infty)}(t) = \lim_{k\to\infty}\mathbf{u}^{(k)}(t)$ есть искомое оптимальное управление для двухточечной граничной задачи (1), (2) при $J(\mathbf{u}) \to \min$.

Очевидно, что условия сходимости для рассматриваемой схемы последовательных приближений будут непосредственно связаны с условиями сходимости при $k \to \infty$ для последовательности $\delta\mathbf{x}^{(k)}(t_f) \to 0$. Здесь $\Delta\mathbf{x}_\infty^{(k)}(t_f) \to 0$, где $\Delta\mathbf{x}_\infty^{(k)}(t) = \mathbf{x}_\infty^{(k)}(t) - \mathbf{x}_\infty^{(k-1)}(t)$ есть решение начальной задачи

$$\frac{d\Delta\mathbf{x}_\infty^{(k)}}{dt} = \widehat{A}_k\Delta\mathbf{x}_\infty^{(k)} + B\delta\mathbf{u}^{(k)}(t), \quad \mathbf{x}_\infty^{(k)}(t_0) = 0, \tag{9}$$

где $\widehat{A}_k = A + (\partial \mathbf{F}/\partial \mathbf{x})_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_\infty^{(k-1)}(t)}$, $\delta \mathbf{u}^{(k)}(t)$ — корректирующее управление для системы (6), вычисляемое, например, в виде (7). Переходная матрица системы (9) представима в виде $\widehat{\Phi}_k(t,\tau) = \Phi(t,\tau) + \Delta\Phi_k(t,\tau)$, с учетом которого грамиан управляемости для (9) можно записать в виде $\widehat{W}_k(t_f,t_0) = W(t_f,t_0) + Q_k(t_f,t_0)$, где $Q_k(t_f,t_0) = \int_{t_0}^{t_f} \Delta\Phi_k(t_f,\tau)BB^T\Phi^T(t_f,\tau)\,d\tau$.

Общее решение уравнения (9) с нулевым начальным условием имеет вид

$$\Delta\mathbf{x}_\infty^{(k)}(t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \widehat{\Phi}_k(t_f,\tau)B\delta\mathbf{u}^{(k)}(\tau)\,d\tau. \tag{10}$$

Так как $\delta\mathbf{x}^{(k+1)}(t_f) = \delta\mathbf{x}^{(k)}(t_f) - \Delta\mathbf{x}_\infty^{(k)}(t_f)$, то, вычитая (10) из (8), с учетом (7) получим

$$\delta\mathbf{x}^{(k+1)}(t_f) = -\int_{t_0}^{t_f} \Delta\Phi_k(t_f,\tau)B\delta\mathbf{u}^{(k)}(\tau)\,d\tau = -Q_k(t_f,t_0)W^{-1}(t_f,t_0)\delta\mathbf{x}^{(k)}(t_f).$$

Отсюда следует (здесь и далее для краткости записи соответствующие аргументы матриц опускаются)

$$\|\delta\mathbf{x}^{(k+1)}(t_f)\| \leqslant \lambda_{\max}^{1/2}(W^{-1}Q_k^TQ_kW^{-1})\|\delta\mathbf{x}^{(k)}(t_f)\|, \tag{11}$$

где $\lambda_{\max}(\cdot)$ — максимальное собственное число матрицы. Таким образом, для сходимости последовательности $\delta\mathbf{x}^{(k)}(t_f) \to 0$ при $k \to \infty$ необходимо и достаточно, чтобы в (11) $\lambda_{\max}(\cdot) < 1$ для всех $k \geqslant 1$. В свою очередь, из (10) следует $\Delta\mathbf{x}_\infty^{(k)}(t_f) = (Q_k + W)W^{-1}\delta\mathbf{x}^{(k)}(t_f)$, т. е. указанные условия также необходимы и достаточны и для сходимости последовательности $\Delta\mathbf{x}_\infty^{(k)}(t_f) \to 0$, для которой имеет место $\delta\mathbf{x}^{(1)}(t_f) = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta\mathbf{x}_\infty^{(k)}(t_f)$.

С учетом (7) можно получить неравенство

$$\int_{t_0}^{t_f} \|\delta\mathbf{u}^{(k)}(\tau)\|^2\,d\tau \leqslant \lambda_{\max}(W^{-1})\|\delta\mathbf{x}^{(k)}(t_f)\|^2.$$

Очевидно, что если имеет место $\delta\mathbf{x}^{(k)}(t_f) \to 0$, то $\lim_{k\to\infty} \|\delta\mathbf{u}^{(k)}(t)\| = 0$ для всех $t \in [t_0, t_f]$ и, стало быть, в этом случае также будет иметь место $\lim_{k\to\infty} \|\delta\mathbf{x}^{(k)}(t)\| = 0$ для всех $t \in [t_0, t_f]$. Таким образом, в рассматриваемом методе последовательные приближения сходятся к искомому решению задачи оптимального управления для системы (1), (2) и заданного функционала.

Указанные выше условия сходимости вполне определяются свойствами матриц W и Q_k . В свою очередь, свойства матрицы Q_k определяются свойствами вектор-функции $\mathbf{F}(t,\mathbf{x})$ в (1), а также выбором начального приближения $\mathbf{x}^{(0)}(t)$. Очевидно, что указанный выше выбор такого приближения при $\widetilde{\mathbf{F}}_0(t) = 0$ вполне допустим, если на первом шаге выполняется условие $\lambda_{\max}^{1/2}(W^{-1}Q_1^TQ_1W^{-1}) < 1$. В задаче оптимальной переориентации космического аппарата дистанционного зондирования Земли, которая рассматривалась в [2–4], это условие выполнялось и, кроме того, с требуемой точностью здесь оказалось возможным заменять $\mathbf{x}_\infty^{(k)}(t)$ на $\mathbf{x}_1^{(k)}(t)$, что соответствует $i_0 = 1$.

Исследование проведено при поддержке РФФИ, проекты № 13-08-97019р_поволжье_а, № 13-01-97002р_поволжье_а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мороз А. И.* Курс теории систем. М.: Высшая школа, 1987, 304 с.

2. *Горелов Ю. Н., Данилов С. Б., Курганская Л. В. и др.* Оптимизация управления сканированием для геометрически сложных маршрутов съемки при дистанционном зондировании Земли из космоса. — В сб.: Труды XX С.-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам (С.-Петербург, 27-29 мая 2013 г.). СПб.: ГНЦ РФ «ОАО «Электроприбор», 2013, с. 212–220.
3. *Горелов Ю. Н., Данилов С. Б., Тропкина Е. А.* Об одном подходе к приближенному решению задачи оптимального управления переориентацией космического аппарата. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2011, т. 18, в. 3, с. 429–431.
4. *Горелов Ю. Н., Данилов С. Б., Юрин В. Е.* Синтез оптимального управления переориентацией космического аппарата одним методом последовательных приближений. — В сб.: Труды XVI Всероссийского научно-технического семинара: «Управление движением и навигация летательных аппаратов». Ч. III. Самара: Изд-во СНЦ РАН, 2013, с. 34–40.
5. *Матвеев Н. М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1967, 564 с.