ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 21 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2014

А. В. Волгин (Москва, ТВП). **О свойствах множества решений искаженных систем уравнений.**

Зафиксируем $n, T, N \in \mathbf{N}$, $N = 2, 3, \ldots$ Пусть $\Omega_N = \{0, 1, \ldots, N-1\}$ и $F_N(n) = \{f : \Omega_N^n \to \Omega_N\}$ — множество всех n-местных функций N-значной логики от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Положим $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и рассмотрим систему из T уравнений

$$\{f_t(\mathbf{x}) = 0, \quad f_t \in F_N(n), \qquad t = 1, 2, \ldots, T. \tag{1}$$

Через S обозначим множество решений системы (1).

Каждой функции $f \in F_N(n)$ сопоставим множества $A_0(f)$ и $A_1(f)$ тех значений аргумента, на которых она принимает значения нуль и отлична от нуля соответственно. Введем обозначения $a_0(f) = |A_0(f)|$, $a_1(f) = |A_1(f)|$. Для каждой функции f и целых чисел u и v: $0 \leqslant u \leqslant a_1(f)$ и $0 \leqslant v \leqslant a_0(f)$ рассмотрим множество таких функций

$$B(f, u, v) = \{g \in F_N(n) : |A_0(g) \cap A_1(f)| = u, |A_1(g) \cap A_0(f)| = v\},$$

что при $g \in B(f, u, v)$ число значений аргументов, в которых функция f принимает значение нуль, а функция g отлична от нуля, равно v и число значений аргументов, в которых функция g принимает значение нуль, а функция f отлична от нуля, равно u.

На множествах $B(f_1, u_1, v_1), B(f_2, u_2, v_2), \ldots, B(f_T, u_T, v_T)$ выберем случайно, равновероятно и независимо функции $\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2, \ldots, \widetilde{f}_T$. Эти функции будем называть случайными искажениями функций $f_1, f_2, \ldots, f_T$. Рассмотрим систему случайных уравнений

$$\{\widetilde{f}_t(\mathbf{x}) = 0, \quad \widetilde{f}_t \in B(f_t, u_t, v_t), \qquad t = 1, 2, \ldots, T. \tag{2}$$

Через $\widetilde{S}$ обозначим множество решений системы (2).

В докладе рассматривается задача нахождения связи между множествами S и $\widetilde{S}$ решений систем уравнений (1) и (2) при выполнении следующих асимптотических условий: при $T, n \to \infty$ сами функции $f_1, f_2, \ldots, f_T$ меняются так, что

1) число решений системы (1) имеет конечный предел, т. е. $|S| \to \Sigma \in \mathbf{N}$;

2) число значений аргументов, на которых функции $f_1, f_2, \ldots, f_T$, принимают значения нуль, неограниченно возрастает, т. е. $a_0(f_t) \to \infty$, $t = 1, 2, \ldots, T$.

В [1] данная задача рассматривалась для случая булевых уравнений, при этом предполагалось, что каждая функция системы (1) является уравновешенной, т. е. принимает каждое из значений нуль и единица ровно на 2^{n-1} значениях аргумента. В работе, представленной данным сообщением, рассматривается обобщение на случай произвольных функций N-значной логики с учетом асимптотических условий 1) и 2) без условия уравновешенности функций.

Положим $a_{\min} = \min\{a_0(f_1), a_0(f_2), \ldots, a_0(f_T)\}$, $a_{\max} = \max\{a_0(f_1), a_0(f_2), \ldots, a_0(f_T)\}$.

Теорема. *Пусть* $v_1, v_2, \ldots, v_T < a_{\min}/2$, $n, T \to \infty$, $|S| \to \Sigma \in \mathbf{N}$, $T/a_{\min} \to 0$. *Тогда*:

1) *если параметры* $v_1, v_2, \ldots, v_T$ *меняются так, что*

$$\sum_{t=1}^{T} \frac{v_t}{a_0(f_t)} \to \infty,$$

то $\mathbf{P}\{\widetilde{S} \cap S = \varnothing\} \to 1$;

2) *если параметры* $v_1, v_2, \ldots, v_T$ *меняются так, что*

$$\sum_{t=1}^{T} \frac{v_t}{a_0(f_t)} \to \varkappa \in (0, \infty), \quad \frac{1}{a_{\min}} \max_t v_t \to 0,$$

то распределение случайной величины $|\widetilde{S} \cap S|$ *сходится к биномиальному распределению* $Bi\,(\Sigma, e^{-\varkappa})$;

3) *если параметры* $v_1, \ldots, v_T$ *меняются так, что*

$$\sum_{t=1}^{T} \frac{v_t}{a_0(f_t)} \to 0,$$

то $\mathbf{P}\{S \subseteq \widetilde{S}\} \to 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Михайлов В. Г.* Оценка точности пуассоновской аппроксимации для числа пустых ячеек в равновероятной схеме размещения частиц комплектами и ее применения. — Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова РАН, 2013, т. 282 с. 165–180.