ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 21 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2014

Е. Н. Ж и д к о в (Москва, МГТУ). **О численном решении обратной нелинейной задачи теплопроводности.**

В последнее время уделяется большое внимание задачам неразрушающего контроля конструкций. Одна из постановок таких задач сводится к определению положения дефекта с помощью измерения теплового потока через торец изделия.

Математически эта задача сводится к задаче определения коэффициента при старшей производной. Этим вопросам посвящено большое количество работ [1–5].

Настоящая работа посвящена численному решению обратной задачи.

Пусть тепловое поле удовлетворяет следующей системе уравнений

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\Big), \quad x \in (0,l), \quad t \in (0,T], \\
u(x,0) = u_0 = \text{const } > 0, \\
k(0)\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \sigma(u^4(0,t) - u_0^4), \\
k(l)\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = q(t).
\end{gathered} \tag{1}
$$

Здесь σ — постоянная Стефана–Больцмана, $q(t)$ — заданная неотрицательная функция, u_0 — температура внешней среды.

1. Решение прямой задачи. Для практического решения поставленной задачи дискретизируем задачу (1). Для этого введем равномерную сетку $\omega_{h\tau} = \{(x_i, t_i)\}$, $x_i = ih$, $t_j = \tau j$, $h = l/h$, $\tau = T/m$.

Положим $u(x_i, t_j) = u_{ij}$.

К уравнению (1) применим консервативную схему [6]. В силу инерционности тепла линеаризуем левое краевое условие.

$$
\begin{gathered}
(u_{ij+1} - u_{ij}) = \frac{1}{2h}\big(\widehat{W}_{i-1/2} - \widehat{W}_{i+1/2} + W_{i-1/2} - W_{i+1/2}\big), \quad u_{i0} = u_0, \\
\frac{1}{\tau}(u_{ij+1} - u_{ij}) = \frac{1}{2h}\big(\widehat{W}_{i-1/2} - \widehat{W}_{i+1/2} + W_{i-1/2} - W_{i+1/2}\big), \quad u_{i0} = u_0, \\
\frac{k_{1/2}}{h}(u_{1j+1} - u_{0j+1}) = \sigma(u_{0j}^4 - u_0^4), \\
\frac{k_{n/2}}{h}(u_{nj+1} - u_{n-1j+1}) = q_{j+1}.
\end{gathered} \tag{2}
$$

Эту задачу можно решить методом разностной прогонки [6].

2. Решение обратной задачи. В качестве обратной задачи рассмотрим следующую:

Пусть нам известно решение задачи (1) при $x = 0$, $u(0,t) = \varphi(t)$. Требуется, зная $\varphi(t)$, найти функцию $k(x)$.

Положим $\varphi_j = \varphi(t_j)$. Введем невязку $N = \sum_j^m (u_{0j} - \varphi_j)^2$.

Требуется найти такой вектор $\overline{k} = (k_{1/2}, k_{3/2}, \ldots, k_{n/2})^{\mathrm{T}}$, который минимизирует невязку N. В силу некорректности поставленной задачи [7] будем минимизировать функционал Тихонова

$$M^{\beta}(\overline{k}) = N(\overline{k}) + \alpha\,\Omega(\overline{k}), \tag{3}$$

где

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n+1} (k_{i+1/2} - k_{i-1/2})^2 + \sum_{i=1}^{n+1} (k_{i-1/2})^2 \tag{4}$$

— стабилизатор. Здесь α — положительная постоянная.

Очевидно, что функционал (5) положительно определен, поэтому, у него существует единственный минимум

$$\overline{k}^{\,\alpha} = (k^{\alpha}_{1/2}, \ldots, k^{\alpha}_{n-1/2})^{\mathrm{T}}. \tag{5}$$

Если набор $\{\varphi_j\}$ известен точно, то в качестве решения обратной задачи можно взять

$$\overline{k}^{\,0} = \lim_{\alpha\to 0} \overline{k}^{\,\alpha} = (k^{0}_{1/2}, \ldots, k^{0}_{n-1/2})^{\mathrm{T}}. \tag{6}$$

Если вместо точных значений $\{\varphi_j\}$ известны такие их приближенные значения $\{\varphi^{\delta}_j\}$, что $\sum_{i=0}^m (\varphi_j - \varphi^{\delta}_j)^2 \leqslant \delta^2$, то в качестве решения обратной задачи берется вектор $\overline{k}^{\alpha}$, для которого $N = \sum_{j=0}^m (u_{0j} - \varphi^{\alpha}_j)^2 = \delta^2$.

В этом случае [7] решение обратной задачи устойчиво.

3. Числовой пример. В качестве примера рассмотрим задачу (1) с

$$\sigma = 5,67\cdot 10^{-8}, \quad u_0 = 273, \quad k(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,\ 0,33), \\ 3, & x \in [0,33,\ 0,71), \\ 2, & x \in [0,71,\ 1), \end{cases} \quad q(t) = 1 + \sin(3t). \tag{7}$$

Результаты расчетов приведены в таблице:

результат	0,999	1,008	0,947	2,216635	2,555	2,77	2,68	2,427	2,014	1,719702	0,981
эталон	1	1	1	1,7647	3	3	3	2,7273	2	2	2

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Prilepko A. I.*, *Orlovsky D. G.*, *Vasin I. A.* Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. N.-Y.: Marcel Dekker, 1999.
2. *Kozhanov A. I.* Composite Type Equations and Inverse Problems. Utrecht: VSP, 1999.
3. *Ivanchov M.* Inverse Problems for Equation of Parabolic Type. Lviv: WNTL Publishers, 2003. (Ser. Math. Studies. V. 10.)
4. *Isakov V.* Inverse Problems for Partial Differential Equations. Berlin etc.: Springer, 1998.
5. *Isakov V.* The inverse problem of option pricing. — In: Recent Developments in Theory and Numerics. Proceedings of International Conference on Inverse Problems. Hong Kong: City Univ. Hong Kong, 2002, p. 47–55.
6. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978, 512 с.
7. *Тихонов А. Н.*, *Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.