ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 21 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2014

Т. А. Ласковая, К. К. Рыбников, О. К. Чернобровина (Мытищи, МГУ леса). **Основные этапы развития теории структурного анализа n-мерных выпуклых многогранников и ее приложения для априорной оценки эффективности метода разделяющих плоскостей.**

1. Краткий исторический очерк. Задача структурного анализа произвольного выпуклого многогранника до настоящего времени является малоизученной, несмотря на то, что сама по себе имеет важное значение в прикладных исследованиях, например, для оценки эффективности симплекс-метода при решении задачи линейного программирования. Основными задачами при этом являются, разумеется, оценки числа вершин f_0 выпуклого n-мерного многогранника и определение соотношений связи для чисел f_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, где f_i — число граней размерности i. Перечень подобных результатов от древнейших времен до современности весьма краток. К таким результатам можно отнести [1]:

— полное описание пяти правильных многогранников, данное Платоном (427–347 до н. э.) и описание практически всех полуправильных многогранников Архимедом (287–212 до н. э.);

— известную формулу Л. Эйлера (1701–1783): $f_0 - f_1 + f_2 = 2$, $(n = 3)$, предположительно известную еще Р. Декарту (1596–1650);

— обобщение формулы Л. Эйлера, опубликованное А. Пуанкаре (1854–1912)

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i F - i = 1 + (-1)^{n+1};$$

— систему линейных уравнений связи чисел f_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ для симплициальных многогранников (уравнения М. Дена (1878–1952) — Д. Соммервиля, опубликованные последним в 1927 г.);

— немногочисленные оценки числа вершин f_0, среди которых следует выделить достижимые оценки Х. Бартельса, полученные им в 1975 г.

$$m(n-1) + 1 \leqslant f_0 \leqslant \begin{cases} 2C^m_{(n-1)/2+m}, & m - \textit{нечетное}; \\ C^m_{n/2+m} + C^m_{(n-2)/2+m}, & n - \textit{четное}, \end{cases}$$

для выпуклого многогранника $M(A, b) = \{x + |Ax \leqslant b, x \geqslant 0\}$, где $A = \{a_{ij}\}$ — матрица размером $m \times n$,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}; \quad x_i \geqslant 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

а аналогичные оценки для $M^*(A, b) = \{x + |Ax = b, x \geqslant 0\}$

$$n - m + 1 \geqslant f_0 \leqslant C^m_{[(n+m)/2]} + C^m_{[(n+m+1)/2]}.$$

Оценки числа вершин могут быть положены в основу априорных предположений об эффективности симплекс-метода как направленного перебора вершин многогранника допустимых решений.

2. Метод разделяющихся плоскостей (прямая задача). В работах Г. В. Балакина, В. Г. Никонова, а впоследствии авторов настоящей статьи [2], [3] изучался метод решения систем булевых уравнений

$$F_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, t), \tag{1}$$

основанный на погружении множества всех решений (1) G в выпуклый многогранник $M(A, b)$:

$$G \subseteq M(A, b).$$

Таким образом, общее решение системы (1) сводится к определению всех (0,1)-точек $M(A, b)$, что может быть реализовано с помощью методов бивалентного программирования.

3. Обратная задача для метода разделяющих плоскостей. В работах [2], [3] указан общий способ построения многогранника $M(A, b)$, где $a_{ij} = \pm 1, 0$, а b — целочисленный вектор. В этом случае, выбрав абсолютно унимодулярную матрицу A, можно построить систему (1), для которой многогранник погружения $M(A, b)$ будет целочисленным.

Другим перспективным подходом к синтезу узлов электронных схем, соответствующих модели (1), является построение $M(A, b)$ с малым числом вершин.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ласковая Т. А.*, *Рыбников К. К.*, *Чернобровина О. К.* Исторические аспекты развития методов анализа структуры полиэдральных множеств и их значение в оценке эффективности методов линейного программирования. — Труды XI международных Колмогоровских чтений. Ярославль: ЯГПУ, 2013, с. 251–255.
2. *Балакин Г. В.*, *Никонов В. Г.* Методы сведения булевых уравнений к системам пороговых соотношений. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 1994, т. 1, в. 3, с. 389–401.
3. *Ласковая Т. А.*, *Рыбников К. К.*, *Чернобровина О. К.* О реализации универсальных двоичных узлов преобразования электронных схем комплексом формальных нейронов с пороговой функцией активации. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2011, т. 18, в. 2, с. 295–297.