О Б О З Р Е Н И Е
П Р И К Л А Д Н О Й И П Р О М Ы Ш Л Е Н Н О Й
Т о м 21 М А Т Е М А Т И К И В ы п у с к 4
2014

В. Г. А л я б ь е в а (Пермь, ПГНИУ). **Границы комбинаторики.**

Комбинаторика — древнейшая и, возможно, ключевая ветвь математики. Современные специалисты по комбинаторной теории разделяют мысль, высказанную в XIX веке Сильвестром: всякая серьезная математическая теорема имеет комбинаторный аналог, комбинаторное рассмотрение предшествует почти всякому анализу. Комбинаторика включена в русло современной математики. Этот процесс определяется обновлением аппарата комбинаторики, в который входят разнообразные теории и методы других областей математики, и расширением области приложений и предмета комбинаторики.

Современный специалист по комбинаторному анализу Мартин Айгнер (Martin Aigner) выделяет [1] в комбинаторике три больших раздела: a) *теорию перечисления*, включающую в себя производящие функции, теоремы обращения, исчисление конечных разностей; b) *теорию порядка*, включающую в себя конечные упорядоченные множества и решетки, матроиды и теоремы существования (типа теоремы Холла и Рамсея); c) *теорию конфигураций*, включающую в себя блок-схемы, группы подстановок и теорию кодирования. Если первые два раздела появились относительно недавно, то исследования конфигураций имеет давнюю историю.

Искусство комбинаторики в широком смысле Лейбниц понимал как часть Искусства Изобретения, отождествляя его с синтезом. *Dissertatio de arte combinatoria* Лейбница содержит в себе зародыш идеи построения универсальной науки и логического исчисления, к которой он возвращался в течение всей жизни. Согласно Лейбницу, задача комбинаторного искусства в этом проекте заключается в том, чтобы: а) «разложить все сложные вещи и понятия на простые элементы, которые сами уже не поддаются дальнейшему разложению и могут быть поняты только через аналогию; найденные таким образом первопринципы и будут представлять собой «алфавит человеческих мыслей», редукция к которому позволяет достигнуть точного знания о вещах; б) выявить все возможные новые комбинации этих первопринципов, в результате чего будут получены новые, в том числе и производные истины; это и есть задача изобретательной логики».

Значимость комбинаторного искусства в математике подчеркивал Дж. Дж. Сильвестр (James Joseph Sylvester, 1814–1897). Исследованию комбинаторных проблем Сильвестр посвятил несколько статей, начиная со статьи 1844 года «Элементарные исследования в анализе комбинаторных агрегатов», в которой он обсудил правила образования различных наборов и систем наборов из элементов данного n-множества. Сильвестр подчеркивал, что решаемые им проблемы относятся к новой математической дисциплине, предметом изучения которой является расположение элементов друг относительно друга. Эта новая наука находится в таком же отношении к количественному комбинаторному анализу, в каком геометрия положения (т. е. проективная геометрия — В.А.) относится к метрической, или теория чисел — к вычислительной арифметике.

«Число, положение, комбинация представляются мне тремя пересекающимися, но различными сферами мысли, к которым имеют отношение все математические идеи», — пишет Сильвестр [2].

К идеям 1844 года Сильвестр вернулся в статьях 1861 года: «Заметка об исторических источниках функций от шести переменных», «Замечание о тактике девяти элементов». В этих статьях он вводит термин «тактика» для обозначения нового раздела математики, изучающего расположение элементов. К этому разделу он относил теорию групп (подстановок), комбинаторный анализ, теорию чисел. Проблемам разного рода представлений натуральных чисел Сильвестр посвятил множество статей. К теоретико-числовым исследованиям относится большая работа Сильвестра «A constructive theory of partitions» (1882). Учению о тактике Сильвестр предрекал большое будущее. Он полагал, что новое учение потребует специального символического исчисления. Однако Сильвестр не реализовал столь широкий замысел, ограничившись решением частных задач.

Взгляды Сильвестра на тактику разделял не менее знаменитый Артур Кэли (Arthur Cayley, 1821–1895). Практический вклад самого Кэли в развитие комбинаторного анализа достаточно велик. Он исследовал магические и латинские квадраты, ориентированные графы, системы троек. В 1864 году Кэли в статье «О понятиях и границах алгебры» предлагал различать в алгебре два вида операций: *тактические и логистические*. Тактическая операция, по мысли Кэли, связана с расположением множества вещей некоторым образом, логистическая (арифметическая) операция представляет собой вычисление для получения в результате числа. Каждая алгебраическая теорема основывается в конечном счете на тактических основаниях. Однако нельзя абсолютно резко разделить тактические и логистические операции. Во всякой серии логистических операций есть тактический элемент, во многих тактических операциях, например, при разбиении чисел, есть кое-что логистическое. Таким образом, алгебра имеет два больших раздела: *Тактику и Логистику*.

В письме к Х. Гюйгенсу от 8 сентября 1679 года Лейбниц ввел термин *analysis situs* (анализ положения) для обозначения особого раздела математики, который изучает *порядок и расположение элементов друг относительно друга*. К идее анализа положения Лейбниц пришел, рассматривая задачи на шахматной доске. Вслед за Лейбницем геометрией на шахматной доске интересовались Эйлер (1758) и Вандермонд (1771). Эйлер решал задачу такого обхода конем всех клеток шахматной доски, при котором конь должен побывать в каждой клетке точно один раз. Эйлер рассматривал квадратные, крестообразные и прямоугольные доски. Вандермонд обобщил задачу хода коня на трехмерный случай.

В 1809 году французский математик и механик Луи Пуансо (1777–1859) прочитал в Институте Франции доклад «О многоугольниках и многогранниках». Свое исследование Пуансо относит к геометрии положения, основоположником которой считает Лейбница. Используя методы *analysis situs*, Пуансо построил два новых многогранника: Большой додекаэдр и Большой икосаэдр. В 1845 году Пуансо в статье «Размышления об основных положениях теории чисел» дает обзор некоторых новых идей в математике и отмечает, что успехи современной ему геометрии и теории чисел идут рука об руку. Если теория чисел рассматривает числа сами по себе, изучает их свойства, не зависящие от способа их представления и действий над ними, а обыкновенная алгебра (или универсальная арифметика), отталкиваясь от обыкновенных чисел, распространяется на какие угодно, то высшая алгебра в теории уравнений опирается на *теорию порядка и комбинаций*. Геометрия — наука о пространственных или протяженных формах — подобно алгебре распадается на две части: предметом изучения первой из частей является пропорциональность и измерение. Вторая часть геометрии рассматривает порядок и расположение вещей в пространстве, не обращая внимание на их величину и фигуру. Эта наука называется геометрией положения, к которой Пуансо относит и теорию звездчатых многоугольников и многогранников. К геометрии положения Пуансо относит также ту «область механики, которая исследует взаимное расположение тел, их взаимодействие, способы, какими скрещиваются их пути, не обращая внимание ни на направление этих путей, ни на время, которое необходимо телам для пробега, ни на силы, двигающие тела. Таковы, например, некоторые машины, в которых не рассматриваются ни сила, ни величина движения, а единственно положение и геометрическое движение разных частей, составляющих эти машины. Ясно, что эта область механики всецело основана на геометрии положения и совпадает с ней» [3]. «Таким образом, в математике всюду мы видим две категории объектов: во-первых, величину и измерение величин, во-вторых, число, порядок, положение вещей без всякой мысли об измерении и количестве. Так что *математика* ... может быть определена как *наука о числе, порядке и мере*».

Известный русский математик А. В. Васильев (1853–1929), много занимавшийся историей математики, в статье «Математика» [4] писал: «Декарт и Лейбниц придавали громадное значение идее порядка ... Лейбниц, для которого пространство было порядок существования, время — порядок последовательности, не мог не придать высокое значение идее порядка ... Пуансо, занимавшийся с 1810 года геометрией звездчатых многоугольников и многогранников, увидел, что этот вопрос, поставленный еще греческой математикой, приводит также к вопросу о порядке, а именно, к теории круговых перемещений, и показал, какое значение имеет эта теория и для геометрии, и для теории чисел». В книге «Целое число» (1919) Васильев еще раз подчеркивает значимость геометрических работ Пуансо: «Объектом математики до XIX века были исключительно непрерывные многообразия ... В XIX веке начинается изучение дискретных (раздельных) систем точек и прежде всего конфигураций, состоящих из конечного числа точек. Введение этих геометрических образов есть заслуга Пуансо, изучившего конфигурации, состоящие из вершин правильных звездчатых многоугольников и многогранников, и показавшего связь многих вопросов теории чисел с теорией конфигураций, например, связь вопроса о звездчатых многоугольниках с числовой функцией Эйлера $\varphi(n)$».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айгнер М.* Комбинаторная теория. М.: Мир, 1982.
2. *Sylvester J. J.* Elementary researches in the analysis of combinatorial aggregation. — The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 1844, v. 24, p. 285–296.
3. *Poinsot L.* Reflexions sur la thórie des polyédres. — J. de mathematiques pures et appliques, 1845, t. 10, p. 1–101.
4. *Васильев А. В.* Математика. Казань: Типо-литография Казанского ун-та, 1916.