ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 21 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2
2014

Е. Е. Дьяконова (Москва, МИАН). **О разложимом ветвящемся процессе в случайной среде.**

Рассматривается разложимый ветвящийся процесс $\mathbf{Z}(n) = (Z_1(n), Z_2(n))$, $n = 1, 2, \ldots$, с двумя типами частиц в случайной среде, где $Z_i(n)$, $i = 1, 2$, — число частиц типа i в n-м поколении. Случайная среда задается последовательностью $\{f_n(s_1, s_2),\ n = 1, 2, \ldots\}$ независимых одинаково распределенных вероятностных производящих функций от двух аргументов. Процесс $\mathbf{Z}(n), n = 1, 2, \ldots,$ описывает динамику развития популяции частиц, которая эволюционирует по следующему сценарию.

Все частицы имеют единичную длительность жизни. В конце жизни частицы дают потомство.

Размножение частиц происходит следующим образом. Каждая частица первого типа из n-го поколения дает случайное число ξ_i потомков типа i, $i = 1, 2$, согласно производящей функции $f_n(s_1, s_2) = \mathbf{E}[s_1^{\xi_1} s_2^{\xi_2}]$, задаваемой средой, независимо от размножения других частиц из этого поколения и от предыстории процесса. Каждая частица второго типа размножается независимо от всех других частиц и дает потомков лишь второго типа, численность которых задается вероятностной производящей функцией $h(s)$, причем $h'(1) = 1, h''(1) \in (0, \infty)$. Таким образом, закон размножения частиц второго типа фиксирован.

Пусть $\mathbf{Z}(1) = (1, 0), |\mathbf{Z}(n)| = Z_1(n) + Z_2(n)$, $\mu = \frac{\partial f_1(s_1, s_2)}{\partial s_1}\Big|_{s_1 = s_2 = 1}$.

В случае, когда частные производные первого и второго порядков в точке $(1, 1)$ всех функций $\{f_n(s_1, s_2), n = 1, 2, \ldots,\}$ ограничены снизу и сверху константами $0 < c_1 < c_2 < \infty$, имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Если* $\mathbf{E} \ln \mu = 0$, *то для любых* $k = 1, 2, \ldots$ *и* $\beta_i \in (0, 1]$, $x_i > 1, i = 1, \ldots, k$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\ln|\mathbf{Z}(n^{\beta_i})|}{\ln n} \leqslant x_i,\ i = 1, 2, \ldots, k \,\Big|\, |\mathbf{Z}(n)| > 0\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\ln Z_2(n^{\beta_i})}{\ln n} \leqslant x_i,\ i = 1, 2, \ldots, k \,\Big|\, Z_2(n) > 0\right) = 1 - \frac{1}{\min_i x_i}\,.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-01-00318).