ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 21 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2014

Е. А. Чернавская (Москва, МГУ). **Бесконечно канальные системы обслуживания с регенерирующим дважды стохастическим потоком.**

Рассматривается система массового обслуживания с бесконечным числом приборов и дважды стохастическим пуассоновским входящим потоком(ДСПП) [1], случайная интенсивность $\lambda(t)$ которого является стационарным регенерирующим случайным процессом.

Времена обслуживания требований образуют последовательность независимых одинаково распределенных случйных ввеличин с функцией распределения $B(x)$. Предполагается, что эта функция распределения имеет «тяжелый хвост», т. е. при $t \geqslant t_0$

$$c_1 t^{-\Delta} \leqslant \overline{B}(x) \leqslant c_2 t^{-\Delta}, \quad 0 < \Delta < 1,$$

для некоторых положительных постоянных c_1, c_2, t_0, где $\overline{B}(x) = 1 - B(x)$.

Пусть $q(t)$ — число требований в системе в момент времени t . При условии, что $\operatorname{cov}(\lambda(0), \lambda(t)) \sim ct^{-\alpha}$, при $t \to \infty$, в [2] доказаны аналоги закона больших чисел и центральной предельной теоремы для $q(t)$. Здесь предполагается, что $\lambda(t)$ — регенерирующий процесс, для этого случая получена оценка для корелляционной функции и на основе этого доказаны предельные теоремы для $q(t)$.

Теорема 1. *Если $\lambda(t)$ — стационарный регенерирующий процесс и $\sup_t \lambda(t,\omega) \leqslant \lambda_M < \infty$ по распределению, то*

$$|r(t)| = |\operatorname{cov}(\lambda(0), \lambda(t))| \leqslant 4\lambda_M^2 P(\tau_0 > t),$$

где τ_0 — время от момента $t = 0$ до первой регенерации $\lambda(t)$.

Теорема 2. *Пусть $\lambda(t)$ — такой стационарный органиченный регенерирующий процесс, что функция распределений периодов его регенерации $\overline{F}(t) \leqslant ct^{-\alpha-1}$. Тогда*

$$\frac{q(t) - \lambda\beta(t)}{\sqrt{\lambda\beta(t)}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1) \quad при \quad t \to \infty, \tag{1}$$

если $\alpha > \Delta$,

$$\frac{q(t)}{\lambda\beta(t)} \xrightarrow{p} 1 \quad при \quad t \to \infty, \tag{2}$$

если $\alpha > 2\Delta - 1$. Здесь $\beta(t) = \int_0^t \overline{B}(x)\,dx$.

Рассмотрим частный случай, весьма важный для приложений. Предположим, что интенсивность входящего ДСПП является полумарковским модулированным процессом, то есть

$$\lambda(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k I_{\{U(t)=k\}},$$

где $\{U(t),\ t \in (-\infty, +\infty)\}$ полумарковский процесс, принимающий значения в $\{0, 1, 2, \ldots\}$ и $\{\lambda_k, 0 \leqslant \lambda_k < C, k \geqslant 0\}$, с матрицей переходных вероятностей $\mathbf{P} = (p_{ij})$

и матрицей функций распределения времен пребывания в состояниях $\mathbf{G} = (G_{ij}(x))$. Мы предполагаем, что матрица $\mathbf{P}$ эргодична, а процесс $U(t)$ — стационарный. В этом случае имеют место предельные теоремы.

Мы предполагаем, что матрица $\mathbf{P}$ эргодична, т. е. цепь Маркова U_n неприводима, апериодична и имеет предельное распределение. Также мы считаем, что процесс $U(t)$ стационарный. Для этого случая доказана следующая предельная теорема.

Теорема 3. *Пусть интенсивность входящего ДСПП является полумарковским модулированным процессом и все вышеперечисленные условия для него выполнены.*

1. *Если* $1 - G(x) \leqslant e^{-qx}$ *для некоторого* $q > 0$. *Тогда* (1) *и* (2) *выполнены при всех* $0 < \Delta < 1$.

2. *Если* $1 - G(x) \sim \frac{L(x)}{x^\delta}$ *для* $\delta > 1$, *где* $L(x)$ *медленно меняющаяся функция при* $x \to \infty$. *Тогда* (1) *имеет место при* $\delta > \Delta + 1$, *а* (2) *при* $\delta > 2\Delta$.

Автор выражает глубокую благодарность Л. Г. Афанасьевой и Е. Е. Баштовой за постоянное внимание к работе, ценные замечания и указания, существенным образом способствовавшие написанию работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 13-01-00653 А.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Grandell J.* Doubly stochastic Poisson process. — Lect. Notes Math., 1976, v. 529, p. 1–276.
2. *Afanasyeva L.*, *Bashtova E.*, *Chernavskaya E.* Limit theorems for queuing system with an infnite number of servers. — In: XXXII International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models and VIII International Workshop «Applied Problems in Theory of Probabilities and Mathematical Statistics Related to Modeling of Information Systems». (Norwegian Univ. Sci. Technol., Trondheim, June 16–21, 2014.) Book of Abstarcts. /Ed. by V. Yu. Korolev, S. Ya. Shorgin. Moscow: Inst. Inform. Problems RAS, 2014, p. 9–11.